2. Projektionsräume und Bündelkonstruktionen

In diesem Kapitel sollen ***Faserbündel***, ***Hauptfaserbündel*** und ***Vektorraumbündel*** konstruiert werden.

2.1 Projektionsräume

Definition 2.1.1
Es seien T eine Mannigfaltigkeit der Klasse C^n und B eine Mannigfaltigkeit der Klasse C^m. Ferner sei $\pi \in \mathscr{C}^k(T,B)$, $k \le \min\{n,m\}$. Das Tripel (T,π,B) heißt ein ***P-Raum*** der Klasse C^k, wenn π surjektiv ist. T heißt der ***Totalraum***, B der ***Basisraum*** und $\pi^{-1}(b) =: T_b$ für $b \in B$ die ***Faser über*** b oder die ***lokale Faser***.

Eine Abbildung $s: U \to T, U \subseteq B$ offen, heißt ***lokaler Schnitt über*** U, wenn s von der Klasse C^k mit $\pi \circ s = 1_U$ ist. Insbesondere ist s injektiv über U. s heißt ***globaler Schnitt*** oder kurz ***Schnitt***, wenn $U = B$ ist. Wir sagen auch: s ist ein (lokaler) C^k-***Schnitt***.

Ist (T',π',B') ein weiterer P-Raum der Klasse C^l, und sind $\phi \in \mathscr{C}^q(T,T')$, $f \in \mathscr{C}^r(B,B')$, so heißt das Paar (ϕ, f) ein ***P-Morphismus*** der Klasse C^t, $t \le \{k,l,q,r\}$, wenn folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\phi} & T' \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi' \\ B & \xrightarrow[f]{} & B' \end{array}$$

Bezeichnungen: Es seien $\tau := (T,\pi,B)$, $\tau' := (T',\pi',B')$, und $(\phi.f) \in Mor(\tau,\tau')$.

Die *Verknüpfung* zweier P-Morphismen (ϕ, f) und (ξ, g) wird definiert durch $(\phi\circ\xi, f\circ g)$. Sind ϕ, f Diffeomorphismen, so heißt das Paar (ϕ, f) ein ***P-Isomorphismus*** mit Inversen (ϕ^{-1}, f^{-1}).

Ist $B = B'$ und $f = 1_B$, so heißt ϕ ein ***B-Morphismus*** von τ in τ'.

Proposition 2.1.2
Es seien τ und τ' P-Räume von der Klasse C^r bzw. C^k. Dann heißt

$$\tau\times\tau' := (T\times T', \pi\times\pi', B\times B')$$

das ***Produkt*** der P-Räume τ und τ'. Der Produktraum ist ein P-Raum der Klasse $C^{\min\{k,r\}}$.

Lemma 2.1.3
Es sei M eine Mannigfaltigkeit der Klasse C^r. Dann ist $\Delta M := \{(x,x) | x \in M\}$ eine C^r-Untermannigfaltigkeit von $M \times M$.

Beweis:
Es sei $\mathbf{E}$ das Modell für M, also $\mathbf{E}\times\mathbf{E}$ das Modell für $M\times M$. Die Diagonale $\Delta\mathbf{E}$ ist in $\mathbf{E}\times\mathbf{E}$ abgeschlossen und spaltet, denn

$$\mathbf{E}\times\mathbf{E} = (\mathbf{E}\times\mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}\times\mathbf{E}) = \Delta\mathbf{E} \oplus (\mathbf{0}\times\mathbf{E}), \text{ wegen}$$
$$(x,y) = (x,x) + (0, y-x).$$

Seien $\psi(x,y)=(x,x)+(0,y-x)$ und $pr_1(\psi(x,y))=(x,x)$. Sei h_V eine lokale Karte um p in M, dann ist $pr_1\circ\psi\circ(h_V\times h_V)$ eine lokale Karte um $(p,p)\in\Delta M$. Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.3.4.

Satz 2.1.4

Es sei $\tau:=(T,\pi,B)$ ein P-Raum der Klasse C^r. Es sei M eine Mannigfaltigkeit der Klasse C^k und $f\in \boldsymbol{C}^m(M,B)$. Ist $f\times\pi: M\times T\to B\times B$ ***transversal*** über ΔB, dann existiert ein P-Raum $\rho:=(S,\sigma,M)$ und eine Abbildung $\Phi: S\to T$, so dass $(\Phi,f):\rho\to\tau$ ein P-Morphismus ist.

Beweis:

ΔB ist eine C^r – Untermannigfaltigkeit von $B\times B$. Folglich ist $(f\times\pi)^{-1}(\Delta B)=:S$ eine $C^{\min\{r,k\}}$ – Untermannigfaltigkeit von $M\times T$ nach Satz 1.3.7. Wir definieren $\sigma(m,t):=m$, $\sigma: S\to M$ und $\Phi(m,t):=t$, $\Phi: S\to T$, dann ist $f(\sigma(m,t))=f(m)=\pi(t)=\pi(\Phi(m,t))$ für alle $(m,t)\in S$.

Definition 2.1.5

Den in Satz 2.1.4 konstruierten P-Raum nennen wir das ***mengentheoretische Faserprodukt*** oder auch ***pull back*** von τ über f, in Zeichen $f^*(\tau):=(f^*T,f^*\pi,M):=(M\times_B T,\sigma,M)$. Ferner setzen wir noch $(\pi^*(f),f):=(\Phi,f)$ für den P-Morphismus.

Proposition 2.1.6

Es seien $\rho:=(S,\sigma,B)$ und $\tau:=(T,\pi,B)$ zwei P-Räume. Das pull back von τ über σ bzw. von ρ über τ, $\pi^*(\rho)=\sigma^*(\tau)$ heißt die ***direkte Summe von*** ρ und τ, in Zeichen $\rho\oplus\tau$.

2.2 Faserbündel

DEFINITION 2.2.1

Es sei $\tau:=(T,\pi,B)$ eine P-Raum und M eine Mannigfaltigkeit der Klasse C^r. Der P-Raum τ heißt ***lokal trivial***, wenn es zu jeden Punkt $b\in B$ eine offene Umgebung V und einen C^q – Diffeomorphismus

$$H_V:\pi^{-1}(V)\to V\times M$$

gibt, so dass folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(V) & \xrightarrow{H_V} & V\times M \\ & \pi\searrow \quad \swarrow pr_1 & \\ & V & \end{array}$$

Beachte: $(H_V,1_V)$ ist ein P-Isomorphismus.

Insbesondere induziert H_V einen C^q – Diffeomorphismus $H_V^{-1}(b,\cdot\,):M\to\pi^{-1}(b)$. Die Faser $\pi^{-1}(b)$ ist eine C^q – Untermannigfaltigkeit von T, denn $T_{t_b}\pi:T_{t_b}(\pi^{-1}(V))\to T_{(b,m)}(V\times M)$ ist regulär. Der C^q – Diffeomorphismus H_V heißt ***lokale Bündelkarte mit typischer Faser*** M.

Die Familie $\mathbf{H}(\boldsymbol{O}) := \{H_V \mid V \in \boldsymbol{O}\}, \boldsymbol{O} \in \mathrm{Cov}(B)$ heißt ein ***Bündelatlas*** von T mit typischer Faser M. Natürlich ist die Trivialisierung nicht eindeutig bestimmt. Die Überdeckung $\boldsymbol{O}$ heißt eine ***trivialisierende Überdeckung*** von B für τ.

Mit anderen Worten: Ist $\boldsymbol{O}$ eine trivialisierende Überdeckung von B für τ, so existiert für jedes $U \in \boldsymbol{O}$ eine lokale Bündelkarte.

Zwei trivialisierende Überdeckungen $\boldsymbol{O}, \boldsymbol{O}' \in \mathrm{Cov}(B)$ von B für τ heißen ***Faserbündeläquivalent***, wenn $\boldsymbol{O} \cup \boldsymbol{O}'$ wieder eine trivialisierende Überdeckung von B für τ ist. Man beachte den Unterschied zur Definition 1.1.1.

Eine Äquivalenzklasse heißt dann eine C^q – ***Faserbündelstruktur auf*** τ.

Analog zur Definition 1.1.1 wollen wir uns jetzt mit den Übergangsabbildungen beschäftigen.
Es seien G_W und H_V zwei lokale Bündelkarten. Wir setzen wieder $A_W^V := G_W \circ H_V^{-1}$.
Für $V, W \in \boldsymbol{O}$ mit $b \in V \cap W$ und $p \in M$ gilt: $A_W^V(b,p) =: (b,p')$ ist ein C^q – Diffeomorphismus. Die Abbildung $F_W^V : (V \cap W) \times M \to M$ definiert durch $A_W^V(b,p) = (b, F_W^V(b,p))$ ist dann auch von der Klasse C^q und induziert einen C^q – Diffeomorphismus $f_W^V : V \cap W \to \mathrm{Diff}(M)$ durch $f_W^V(b) := F_W^V(b,\cdot\,)$. Es ist also

$$f_W^U(b) \circ f_U^V(b) = f_W^V(b) \quad \text{und} \quad f_V^V(b) = 1_M \quad \text{für jedes } b \in U \cap V \cap W.$$

Also ist in der Tat $f_W^V(b) \in \mathrm{Diff}(M)$.

Die C^q – Diffeomorphismen A_W^V heißen ***Übergangsabbildungen***, manchmal auch die Abbildungen f_W^V oder auch die Abbildungen F_W^V selbst.

Bemerkung
Es sei $h_X \times k_Y$ eine lokale Karte für $V \times M$ und $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ das Modell für $V \times M$. Es sei $A_W^V(b,p) = (b,p')$ mit $p' \in Y'$ und $k_{Y'}$ eine lokale Karte um p'. A_W^V ist genau dann ein C^q – Diffeomorphismus, wenn

$$(h_X \times k_{Y'}) \circ A_W^V \circ (h_X^{-1} \times k_Y^{-1}) : h_X(X \cap V \cap W) \times k_Y(Y) \to h_X(X \cap V \cap W) \times k_{Y'}(Y')$$

ein C^q – Diffeomorphismus ist.

Wir fassen noch einmal zusammen.

Definition 2.2.2
Ein P-Raum τ versehen mit einem vollständigen Bündelatlas der durch eine Trivialisierungsstruktur induziert ist, heißt ein P-Raum mit C^q – Struktur modelliert durch die Faser M oder ein C^q – ***Faserbündel mit typischer Faser*** M und ***Strukturgruppe*** $\Gamma \le \mathrm{Diff}(M)$.

Wir definieren nun abstrakt Faserbündel.

Definition 2.2.3
Es seien T, M C^r – Mannigfaltigkeiten. Es sei (T,π,B) ein ***P-Raum***. Das Tripel $\tau := (T,\pi,B)$ heißt ein C^r – ***Faserbündel*** mit ***typischer Faser*** M und ***Strukturgruppe*** $\Gamma \leq \mathrm{Diff}(M)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Fb1 Für jedes $b \in B$ ist $\pi^{-1}(b)$ die Mannigfaltigkeit M.

Fb2 Es existiert ein $\boldsymbol{O} \in \mathrm{Cov}(B)$ und für jedes $V \in \boldsymbol{O}$ ein C^p – Diffeomorphismus $H_V : T_V \to V \times M$ (Trivialisierungsabbildung), so dass folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(V) \arrow[rr, "H_V"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V \times M \arrow[dl, "pr_1"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

und für jedes $b \in B$ die Abbildung

$$H_V^{-1}(b,\cdot\,) : M \to \pi^{-1}(b) = T_b$$

ein C^p – Diffeomorphismus ist.

Fb3 Sind V, $W \in \boldsymbol{O}$, $V \cap W \neq \emptyset$, dann ist die Abbildung

$$f_W^V : V \cap W \to \Gamma$$

induziert durch

$$A_W^V(b,p) = (b, F_W^V(b,p)) = (b, f_W^V(b)p)$$

von der Klasse C^p.

Fb4 Ist Ξ ein vollständiger C^p – Atlas für T und $\boldsymbol{O}$ ein C^p – Atlas für B, so heißt Ξ assoziiert mit $\boldsymbol{O}$.

Bemerkung:
In FB1 kann die Mannigfaltigkeit M durch B indiziert werden. Die Abbildung π ist insbesondere eine Submersion.

Definition 2.2.4
Es seien τ und ρ C^r – Faserbündel mit typischer Faser M. Ist $B = B'$ und $f = 1_B$, so heißt ϕ ein B – Morphismus. Ein P – Morphismus $(\phi, f) \in Mor(\tau,\rho)$ der Klasse C^r heißt hier ein C^r – Faserbündelmorphismus.

Wir wollen nun auf einer Menge über einer Mannigfaltigkeit eine Faserstruktur definieren.

Lemma 2.2.5
Es seien B, M und N Mannigfaltigkeiten der Klasse C^r. Es sei $f : B \times M \to N$ eine Abbildung der Klasse $C^{n \geq r}$, so dass für jedes $b \in B$ die Abbildung $f(b,\cdot\,) : M \to M$ ein C^n – Diffeomorphismus (bzw. eine C^n – Submersion) ist.

Dann ist die Abbildung $F(b,m)=(b,f(b,m))$ von $B\times M \to B\times N$ ein C^n – Diffeomorphismus (bzw. eine C^n – Submersion).

Beweis:
Für Banachräume gilt $f'(x,y)(u,v)=D_1f(x,y)u+D_2f(x,y)v$. Dies korrespondiert im Tangentialraum zu $T_{(x,y)}f(u,v)=T_xf(\,\cdot\,,y)u+T_yf(x,\cdot\,)v$, wenn wir $T_{(x,y)}(A\times B)$ vermöge der Tangentialabbildungen der Projektionen mit $T_xA\times T_yB$ identifizieren. Mit diesen Vorbetrachtungen folgt nun

$$T_{(b,m)}F:T_{(b,m)}(B\times M)\to T_{F(b,m)}(B\times N)$$

ist äquivalent zu

$$T_{(b,m)}F:T_bB\times T_mM\to T_bB\times T_{f(b,m)}N.$$

Mit

$$T_{(b,m)}F=T_bu_1\circ T_{(b,m)}pr_1+T_{f(b,m)}u_2\circ T_{(b,m)}f$$

folgt somit

$$T_{(b,m)}F(u_b,v_m)=(u_b,T_b(f(\,\cdot\,,m))u_b+T_m(f(b,\cdot\,))v_m).$$

Damit ist der Beweis nach Lemma 1.3.1 erbracht.

Proposition 2.2.6
Es seien B und M Mannigfaltigkeiten der Klasse C^n. Es sei T eine Menge und $\pi:T\to B$ eine surjektive Abbildung. Es sei $\boldsymbol{O}\in\mathrm{Cov}(B)$ und für jedes $V\in\boldsymbol{O}$ sei

$$H_V:\pi^{-1}(V)\to V\times M$$

eine Bijektion mit $pr_1\circ H_V=\pi|\pi^{-1}(V)$. Ferner existiere für alle $b\in V\cap W$, $W\in\boldsymbol{O}$ die Abbildung

$$f_W^V(b)\in\mathrm{Diff}(M)$$

und Fb3 sei erfüllt.

Dann existiert, bis auf Diffeomorphie, eine eindeutige C^n – Faserstruktur auf $\tau=(T,\pi,B)$, so dass τ ein C^n – Faserbündel mit typischer Faser M und Strukturgruppe Γ ist.

Beweis:
Eine Topologie auf T ist wie folgt gegeben: Zuerst erstellen wir auf V eine Topologie: Es sei $\sigma_V:=\{H_V^{-1}(U\times W)|U\times W \text{ offen in } V\times M\}$. Wegen $\bigcup_{V\in\boldsymbol{O}}\pi^{-1}(V)=T$ (π surjektiv), ist $\mathscr{S}:=\bigcup_{V\in\boldsymbol{O}}\sigma_V$ eine Subbasis einer Topologie auf T. Insbesondere sind die $(H_V)_{V\in\boldsymbol{O}}$ Homöomorphismen, und π stetig. Es sei $A_W^V:=H_W\circ H_V^{-1}$ definiert durch $A_W^V(b,p):=(b,f_W^V(b)p)$, dann folgt aus Lemma 2.2.5 mit Fb3, dass $F_W^V(b,p):=f(b)p$. Damit sind F_W^V und A_W^V C^n – Diffeomorphismen sind. Es sei nun h_U eine lokale Karte in B mit $U\cap V\neq\emptyset$ und k_X eine lokale Karte in M. Wir setzen $e_{U\times X}^V:=(h_U\times k_X)\circ H_V$. Die hierdurch definierten lokalen Karten $e_{U\times X}^V$, wobei V, U und X die entsprechenden Überdeckungen durchlaufen, sind wirklich von der Klasse C^n, denn

$$e_{R\times Y}^W\circ(e_{U\times X}^V)^{-1}=(h_R\times k_Y)\circ A_W^V\circ(h_U^{-1}\times k_X^{-1}).$$

Die Eindeutigkeit folgt aus der Verträglichkeit mit den Bündelkarten.

Satz 2.2.7
Es sei $\boldsymbol{\tau} = (T, \boldsymbol{\pi}, B)$ ein C^n-Faserbündel mit typischer Faser *M*. Es sei $f \in \boldsymbol{C}^r(N,B)$. Der *P*-Raum $f^*\boldsymbol{\tau}$ ist ein C^p-Faserbündel ($p := \min\{n,r\}$) mit typischer Faser *M*.

Beweis:
Es sei $f^*\boldsymbol{\tau} = (f^*T, f^*\boldsymbol{\pi}, B)$ das pull back des *P*-Raumes $\boldsymbol{\tau}$ vermöge *f*. $f^*\boldsymbol{\tau}$ ist nach 2.1.4 selbst ein *P*-Raum. Es seien $H_V, V \in \boldsymbol{O} \in \mathrm{Cov}(B)$ die Trivialisierungsabbildungen für $\boldsymbol{\tau}$. Es sei $f(N) \cap V \neq \emptyset$. Wir betrachten folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1}(V)\underset{B}{\times}\boldsymbol{\pi}^{-1}(V) & \xrightarrow{pr_2} & \boldsymbol{\pi}^{-1}(V) & \xrightarrow{H_V} & V\times M \\ pr_1\downarrow & & \downarrow\boldsymbol{\pi} & \swarrow pr_1 & \\ f^{-1}(V) & \xrightarrow[f]{} & V & & \end{array}$$

Wir definieren
$$(H_{f^{-1}(V)})^{-1}(n,m) := (n, H_V^{-1}(f(n),m)).$$
Dann ist
$$H_{f^{-1}(V)} : f^{-1}(V)\underset{B}{\times}\boldsymbol{\pi}^{-1}(V) \to f^{-1}(V)\times M$$
eine bijektive Abbildung. Ferner ist $\boldsymbol{O}' := f^{-1}(\boldsymbol{O}) = \{f^{-1}(U) | U \in \boldsymbol{O}\}$ eine offene Überdeckung von N. Mit Hilfe der Partialabbildung gilt nun:
$$H_{f^{-1}(V)}(n,t) = (n,(H_V^{-1}(f(n),\cdot\,))^{-1}(t)) = (n,m).$$
Es sei nun $n \in f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$. Dann folgt für die Übergangsabbildung:
$$\begin{aligned} A^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(W)}(n,m) &= H_{f^{-1}(W)} \circ H'^{-1}_{f^{-1}(V)}(n,m) \\ &= H_{f^{-1}(W)}(n, H'^{-1}_V(f(n),m)) \\ &= (n,(H_W^{-1}(f(n),\cdot\,))^{-1} \circ H'^{-1}_V(f(n),\cdot\,)(m)). \end{aligned}$$
Nun ist aber $(H_W^{-1}(f(n),\cdot\,))^{-1} \circ H'^{-1}_V(f(n),\cdot\,)(m) = g_W^V(f(n)) = (g_W^V \circ f)(n)$. Insbesondere ist $g_W^V(f(n)) \in \mathrm{Diff}(M)$ und $g_W^V \circ f$ ist in der Tat ein C^p-Diffeomorphismus. Damit ist auch **Fb3** erfüllt. Aus 2.2.6 folgt nun die Behauptung.

Wir setzen noch $f^*(g)^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(W)}(n) := g_W^V(f(n))$ und nennen $f^*(g)^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(W)}$ pull back des C^p-Diffeomorphismusses vermöge *f*.

Nach Voraussetzung ist $H_V^{-1}(f(n),\quad) : M \to \boldsymbol{\pi}^{-1}(f(n))$ ein C^n-Diffeomorphismus. Folglich sind für jedes $n \in N$ die Abbildungen $(H_{f^{-1}(V)})^{-1}(n,m) = (n, H_V^{-1}(f(n),m))$ und $H_{f^{-1}(V)}(n,t) = (n,(H_V^{-1}(f(n),\cdot\,))^{-1}(t))$ von der Klasse C^p. Die Übergangsabbildungen $f^*(g)^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(W)}$ sind durch $f^*(g)^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(W)}(n) = g_W^V(f(n))$ definiert und damit natürlich von der Klasse C^p.

Bemerkung 2.2.8
Identifizieren wir $(f^*T)_n \equiv T_n$, so können wir das ***pull-back-Bündel*** eines Faserbündels wie folgt beschreiben.

$f^*\tau = (f^*T,\, f^*\pi,\, N)$ ist ein Faserbündel mit folgenden Eigenschaften:

PB1 Für alle $n \in N$ ist $(f^*T)_n = T_n$.

PB2 Das folgende Diagramm ist kommutativ und $\phi \,|\, (f^*T)_n = 1_{T_n}$.

$$\begin{tikzcd} f^*T \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f^*\pi"'] & T \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

PB3 Ist $T = B \times M$, dann ist $f^*T = N \times M$ und $f^*\pi$ ist die Projektion auf den ersten Faktor.

PB4 Ist $V \subseteq B$ offen und $W = f^{-1}(V)$, dann ist $f^*(T_V) = (f^*T)_W$ und folgendes Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{tikzcd} & f^*T_V \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & T_V \arrow[dl] \arrow[dd] \\ f^*T \arrow[rr] \arrow[dd] & & T \arrow[dd] & \\ & W \arrow[rr] \arrow[dl] & & V \arrow[dl] \\ N \arrow[rr] & & B & \end{tikzcd}$$

Definition 2.2.9
Ein (lokaler) C^r – Schnitt in einem C^r – Faserbündel ist ein (lokaler) C^r – Schnitt im untergeordneten P-Raum.

Beachte, dass durch die Trivialisierung ein Schnitt allein durch die typische Faser und die Basis bestimmt ist. Ist nämlich $s : B \to T$ ein Schnitt, so ist $H_V(s(b)) = (b, \tilde{s}(b))$ in der Trivialisierung.

Der pull-back-Schnitt ist definiert als $f^*s(n) = (n, s(f(n)))$.

2.3 Hauptfaserbündel

Definition 2.3.1
Es sei G eine Gruppe. Wir sagen: G ist verträglich mit einer differenzierbaren Struktur, wenn die Abbildungen $(x,y) \mapsto xy$ und $x \mapsto x^{-1}$ differenzierbar sind. Ist dieses der Fall, so sprechen wir von einer differenzierbaren Gruppe, im endlichdimensionalen von einer ***LIE-Gruppe***.

Definition 2.3.2
Es sei B eine Mannigfaltigkeit der Klasse C^r und G eine differenzierbare Gruppe der Klasse C^r. Ein ***Hauptfaserbündel*** zur Basis B mit ***Strukturgruppe*** G ist ein Viertupel $\lambda = (P, G, \pi, B)$

bestehend aus einer C^r-Mannigfaltigkeit P, auf der die Gruppe G von rechts durch $(p,g)\mapsto p\cdot g$ operiert und folgende Bedingung erfüllt ist.

HFB: Zu jedem $b\in B$ existiert eine offene Umgebung U, die b enthält und ein Isomorphismus $f_U : U\times G\to \pi^{-1}(U)$, so dass gilt:
Für jedes $b\in B$ und alle $g,h\in G$ ist $\pi(f_U(b,g))=b$ und $f_U(b,gh)=f_U(b,g)\cdot h$.

Bemerkung 2.3.3
Ist $\lambda=(P,G,\pi,B)$ ein Hauptfaserbündel, dann ist das Tripel (P,π,B) ein Faserbündel.

Die Abbildung $(p,g)\mapsto(p,p\cdot g)$ ist ein Isomorphismus von $P\times G$ auf $P\oplus P$.

Operiert die Gruppe frei auf P, so ist für jedes $p\in P$ die Abbildung $g\mapsto p\cdot g$ ein Isomorphismus von G auf die Faser $P_{\pi(g)}$. Insbesondere ist $B=P/G$.

Ein Schnitt im Hauptfaserbündel ist ein Schnitt im untergeordneten Faserbündel. Ein Hauptfaserbündel ist genau dann trivialisierbar, wenn es einen globalen Schnitt gibt.

2.4 Vektorraumbündel

2.4.1 Definition eines Vektorraumbündels und pull back

Definition 2.4.1.1
Es sei B eine Mannigfaltigkeit der Klasse C^r und $\pi : T\to B$ ein C^p-Morphismus. Das Tripel $\xi=(T,\pi,B)$ heißt ein ***Vektorraumbündel*** mit typischer Faser $\mathbf{F}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

Vb1 $\bigwedge_{b\in B}\pi^{-1}(b)=:T_b$ trägt eine Banachraumstruktur.

Vb2 Es existiert ein $\boldsymbol{O}\in\mathrm{Cal}(B)$ und für jedes $V\in\boldsymbol{O}$ ein C^r-Diffeomorphismus

$$H_V:\pi^{-1}(V)\to V\times\mathbf{F},$$

so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(V) \arrow[rr, "H_V"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V\times\mathbf{F} \arrow[dl, "pr_1"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

und für jedes $b\in B$ die Abbildung

$$H_V^{-1}(b,\cdot):\mathbf{F}\to\pi^{-1}(b)$$

ein linearer stetiger Isomorphismus ist.

Vb3 Sind $V,W\in\boldsymbol{O}$ mit $V\cap W\neq\emptyset$, dann ist die Abbildung

$$g_W^V : V\cap W\to \boldsymbol{L}(\mathbf{F},\mathbf{F})$$

induziert durch

$$A_W^V(b,\mathbf{e})=(H_W\circ H_V^{-1})(b,\mathbf{e})=(b,g_W^V(b)\mathbf{e})$$

ein C^r-Diffeomorphismus.

Sind **Vb2** und **Vb3** erfüllt, so heißt $\mathcal{O}$ eine ***trivialisierende Überdeckung*** für ξ, und die Abbildungen $H_V, V\in\mathcal{O}$ heißen ***Trivialisierungsabbildungen***, manchmal auch ***Vektorbündel-Karten***.

Zwei trivialisierende Überdeckungen $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ von B für ξ heißen ***Vb-äquivalent***, wenn $\mathcal{O}\cup\mathcal{O}'$ eine trivialisierende Überdeckung von B für ξ ist und **Vb2**, **Vb3** erfüllt. Eine Äquivalenzklasse heißt eine C^r-Vb-Struktur auf ξ.

Sind $\mathbf{F}$ und B endlichdimensional, so folgt **Vb3** aus **Vb2**.

Proposition 2.4.1.2
Es sei B eine Mannigfaltigkeit der Klasse C^r, T eine Menge und $\pi : T\to B$ eine Abbildung. Es sei $\mathcal{O}\in\mathrm{Cov}(B)$, für jedes $V\in\mathcal{O}$ sei $H_V:\pi^{-1}(V)\to V\times\mathbf{F}$ eine Bijektion, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(V) \arrow[rr, "H_V"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V\times\mathbf{F} \arrow[dl, "pr_1"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

Ferner seien für $b\in V\cap W$ die Abbildungen

$$g_W^V(b):\mathbf{F}\to\mathbf{F}$$

stetige lineare Isomorphismen und erfüllen **Vb3**.

Dann existiert eine eindeutige C^r-Bündelstruktur für (T,π,B), so dass (T,π,B) ein ***Vektorraumbündel*** ist.

Beweis:
Zur Topologie vergleiche 2.2.6.
Es sei $A_W^V = H_W\circ H_V^{-1}$. Dann ist $A_W^V(b,\mathbf{e}) = (b, g_W^V(b)\mathbf{e})$. Nach Voraussetzung ist $g_W^V : V\cap W\to\mathcal{L}(\mathbf{F},\mathbf{F})$ von der Klasse C^r. Folglich ist auch A_W^V von der Klasse C^r, denn lokal ist A_W^V von der Gestalt $A = u_1\circ pr_1 + u_2\circ\Phi\circ(u_1\circ g\circ pr_1 + u_2\circ pr_2)$, wobei Φ bilinear ist. Wegen $A_W^V\circ A_V^W = 1_V$ und $A_V^W\circ A_W^V = 1_W$ ist damit A_W^V ein C^r-Diffeomorphismus. Die Abbildung $\pi\,|\,V = pr_1\circ H_V$ ist folglich eine Submersion. Sind nun $\mathbf{u}_b,\mathbf{v}_b\in\pi^{-1}(b)$, so erklären wir eine Addition durch $\mathbf{u}_b+\mathbf{v}_b := H_V^{-1}(b, H_V(\mathbf{u}_b)+H_V(\mathbf{v}_b))$ und eine Multiplikation durch $\alpha\cdot\mathbf{u}_b := H_V^{-1}(b,\alpha\cdot H_V(\mathbf{u}_b))$ und erhalten eine Vektorraumstruktur auf $\pi^{-1}(b)$. Diese kann auch noch zu einen Banachraum durch $\|\mathbf{u}_b\| := \|H_V(\mathbf{u}_b)\|$ gemacht werden. Man zeige nun, dass diese Definition von der Bündelkarte H_V unabhängig ist. Man beachte, dass $H_W(b,\cdot\,)\circ H_V^{-1}(b,\cdot\,)$ ein stetiger linearer Isomorphismus ist.

Definition 2.4.1.3
Es seien $\xi = (X, \pi_B, B)$ und $\eta = (Y, \pi_M, M)$ zwei Vektorraumbündel. Ein Vektorraumbündelmorphismus (Φ, f) ist ein *P*-Morphismus mit folgenden Eigenschaften:

Vbm1 Die induzierte Abbildung $\Phi_b : X_b \to Y_{f(b)}$ ist eine stetige lineare Abbildung.

Vbm2 Für jedes $b \in B$ existieren Trivialisierungsabbildungen

$$H_V : \pi_B^{-1}(V) \to V \times \mathbf{F},\ \ R_W : \pi_M^{-1}(W) \to W \times \mathbf{G}$$

mit $f(V) \subseteq W$, so dass für $b \in V$ die Abbildung

$$b \mapsto \alpha_W^V(b) = (R_W^{-1}(f(b), \cdot\,))^{-1} \circ \Phi_b \circ H_V^{-1}(b, \cdot\,)$$

ein C^r – Morphismus ist.

Proposition 2.4.1.4
Es seien ξ und η zwei Vektorraumbündel. Es sei $g : B \to M$ ein C^r – Morphismus. Es sei für jedes $b \in B$ die Abbildung $\Phi_b : X_b \to Y_{g(b)}$ stetig und linear, und es sei **Vbm2** erfüllt.
Dann ist die Abbildung $\Phi : X \to Y$ definiert durch $\Phi \,|\, X_b := \Phi_b$ zusammen mit g ein ***Vektorbündel-Morphismus***.

Beweis:
Da die Aussage nur lokal zu überprüfen ist, dürfen wir beide Vektorraumbündel als trivial annehmen. Es sei also $X = V \times \mathbf{F}$ und $Y = W \times \mathbf{G}$. Die Abbildung Φ ist dann durch $\Phi(b, \mathbf{e}) = (g(b), \Phi_b(\mathbf{e}))$ gegeben. Vermöge der lokalen Karten dürfen wir sogar $V \subseteq \mathbf{F}$ und $W \subseteq \mathbf{G}$ annehmen. Dann ist aber $\Phi = u_1 \circ g \circ pr_1 + u_2 \circ \beta \circ (u_1 \circ \alpha \circ pr_1 + u_2 \circ pr_2)$, wobei $\beta(f, x) := f(x)$ bilinear ist. Nun folgt die Aussage aus der Voraussetzung.

Bezeichnung und KOROLLAR 2.4.1.5
Es sei $V \subseteq B$ offen und $\xi = (X, \pi, B)$ ein Vektorraumbündel mit typischer Faser **F**. Dann ist $\xi_V := (X_V\, \pi_V, V)$ mit $X_V := \pi^{-1}(V)$ und $\pi_V = \pi \,|\, \pi^{-1}(V)$ ein Vektorraumbündel mit typischer Faser **F**.

Satz 2.4.1.6
Es sei $\xi := (\pi : X \to B)$ ein Vektorraumbündel mit typischer Faser **F** und es sei $f \in C^r(M, B)$. Dann ist das pull back Bündel $f^*(\xi) := (f^*\pi : f^*X \to M)$ wie folgt gegeben. Es sei $f^*\xi$ das pull back des Faserbündels ξ mit typischer Faser **F**, so dass $(\pi^*(f), f)$ definiert durch $\pi^*(f)(m, \mathbf{u}) = \mathbf{u}_{f(m)}$, für $(m, u) \in f^*X = M \times_B X$ ein Vektorbündel-Morphismus ist.

Endlichdimensionale Räume können einfacher charakterisiert werden.

Lemma 2.4.1.7
Es sei $\xi = (E, \pi, M)$ ein Vektorraumbündel mit typischer Faser $\mathbf{F}^n$. Es sei $p \in M$ und $\mathbf{e} \in E_p$.
Dann gibt es ein $s \in \Gamma(\xi)$ mit $s(p) = \mathbf{e}$.

Beweis:
Sei $p \in U, U \subseteq M$ offen. Sei $H_U^{-1} : U \times \mathbf{F}^n \to E_p$ mit $H_U^{-1}(p, \mathbf{v}) = \mathbf{e}$. Seien $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n \in \Gamma(U, \mathbf{F}^n)$ Basisschnitte mit $\tilde{s}_i(p) = \mathbf{v}_i$. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{F}$ mit $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{s}_i(p)$. Sei $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(M, \mathbf{F})$ mit $\varphi(p) = 1$ und $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \mathrm{U}$ Bump-Funktion. Sei $s_i : M \to \mathbf{F}^n$ definiert durch $s_i(q) = \varphi(q) \cdot \tilde{s}_i(q)$ für $q \in U$, $s_i(q) = 0$ für $q \notin U$. Dann ist $s := H_U^{-1} \circ (u_1 + u_2 \circ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot s_i)$ der gesuchte Schnitt.

Satz von Serre 2.4.1.8
Es seien ξ, η Vektorraumbündel über M. $\xi = (E, \pi, M)$ habe typische Faser $\mathbf{F}^n$. Für $r \geq 1$ bezeichne $\mathscr{L}_r(\Gamma(\xi), \Gamma(\eta))$ den $\mathscr{C}^\infty(M, \mathbf{F})-$Modul aller r-linearen Abbildungen. Dann ist

$$\vartheta : \Gamma(\mathscr{L}_r(\xi, \eta)) \to \mathscr{L}_r(\Gamma(\xi), \Gamma(\eta))$$

definiert durch

$$(\vartheta(\ell)(s_1, \ldots, s_r))(p) := \ell(p)(s_1(p), \ldots, s_r(p))$$

ist ein $\mathscr{C}^\infty(M, \mathbf{F})-$Modulisomorphismus.

Beweis:
ϑ ist injektiv:
Dazu seien $\ell_1, \ell_2 \in \Gamma(\mathscr{L}_r(\xi, \eta))$ mit $\vartheta(\ell_1) = \vartheta(\ell_2)$. Zu zeigen ist $\ell_1 = \ell_2$. Dazu ist für alle $p \in M$ $\ell_1(p) = \ell_2(p)$ zu zeigen. D. h. aber: Für alle $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \in E_p$ gilt $\ell_1(p)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) = \ell_2(p)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$. Seien $s_1, \ldots, s_r \in \Gamma(\xi)$ nach Lemma 2.4.1.7 Basisschnitte mit $s_i(p) = \mathbf{v}_i$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\ell_1(p)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) &= \ell_1(p)(s_1(p), \ldots, s_r(p)) \\
&= (\vartheta \ell_1)(s_1, \ldots, s_r)(p) \\
&= (\vartheta \ell_2)(s_1, \ldots, s_r)(p) \\
&= \ell_2(p)(s_1(p), \ldots, s_r(p)) \\
&= \ell_2(p)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r).
\end{aligned}$$

ϑ ist surjektiv:
Sei $h \in \mathscr{L}_r(\Gamma(\xi), \Gamma(\eta))$. Gesucht ist ein $\ell \in \Gamma(\mathscr{L}_r(\xi, \eta))$ mit $\vartheta(\ell) = h$. Dazu genügt $r = 1$ nach 0.2.22.
Wir zeigen zuerst: Für alle $s, s' \in \Gamma(\xi)$ und alle $p \in M$ gilt: Aus $s(p) = s'(p)$ folgt $h(s)(p) = h(s')(p)$.
Wir definieren $\alpha_i : U \to \mathbf{F}$
$\beta_i : M \to \mathbf{F}$ durch $\beta_i(q) = \varphi(q)\alpha_i(q)$

2.4.2 Tangential- und Kotangentialbündel

Definition und Satz 2.4.2.1
Es sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^r, $r \geq 1$. Es sei $T(M)$ die (disjunkte) Vereinigung der Tangentialräume $T_m M$, $m \in M$. Es sei $\pi : T(M) \to M$ definiert durch $\pi(T_m M) = m$. Ist $\mathscr{O}$ eine Überdeckung von M, die aus lokalen Karten besteht, so ist $H_V := Th_V$ eine Trivialisierungsabbildung, also $H_V : (T(V) := \pi^{-1}(V)) \to V \times \mathbf{E}$, wobei $\mathbf{E}$ Modell für M ist. Insbesondere gilt $\pi = pr_1 \circ H_V$. Ist h_W eine weitere lokale Karte, so ist

$$A_W^V = H_W \circ H_V^{-1} = Th_W \circ (Th_V)^{-1} = Th_W \circ Th_V^{-1} = T(h_W \circ h_V^{-1}) = Ta_W^V$$

und es gilt $A_W^V(x,\mathbf{e}) = (a_W^V(x),(a_W^V)'(x)(\mathbf{e}))$. Da die Abbildung $(a_W^V)'(x)$ von der Klasse C^{r-1} und ein linearer stetiger Isomorphismus ist, ist auch A_W^V von der Klasse C^{r-1} und bijektiv. Damit sind die Voraussetzungen der Proposition 2.4.1.2 erfüllt und $\boldsymbol{\tau}_M = (TM,\boldsymbol{\pi},M)$ ist ein Vektorraumbündel der Klasse C^{r-1} und heißt ***Tangentialbündel***.

Ist N eine weitere k-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^r, $r \geq 1$ und $f \in \mathscr{C}^r(M,N)$, so ist $(Tf,f):\boldsymbol{\tau}_M \to \boldsymbol{\tau}_N$ ein Tangentialbündelmorphismus.

Es sei nun $\mathbf{E}' := \mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{K})$ der topologische Dualraum von $\mathbf{E}$. Dies ist ein Banachraum. Ist h_V eine lokale Karte, so induziert Th_V in kanonischer Weise einen Isomorphismus $(Th_V^{-1})^*$ von T_m^*M auf $\mathbf{E}'$. Es sei also $T^*(M)$ die (disjunkte) Vereinigung der Kotangentialräume T_m^*M und $\boldsymbol{\pi}:T^*(M) \to M$ definiert durch $\boldsymbol{\pi}(T_m^*M) = m$. Sind h_V, h_W zwei lokale Karten, so definieren sie wieder eine Bündelkarte $(Th_W^{-1})^* \circ (Th_V)^* =: (A_W^V)^*$ mit $(A_W^V)^*(x,\boldsymbol{\lambda}) = (a_W^V(x),((a_W^V)')^*(\boldsymbol{\lambda}))$, wobei $(((a_W^V)'(x))^*(\boldsymbol{\lambda}))(\mathbf{e}) = \boldsymbol{\lambda}((a_W^V)'(x)(\mathbf{e}))$ ist. Wieder sind die Voraussetzungen von 2.4.1.2 erfüllt und $\boldsymbol{\tau}_M^* = (T^*(M),\boldsymbol{\pi},M)$ ist ebenfalls ein Vektorraumbündel der Klasse C^{r-1} und heißt ***Kotangentialbündel***.

2.5 Allgemeine Konstruktion von Vektorraumbündeln aus bekannten Vektorraumbündeln

Definition 2.5.1

Es seien I und J endliche Mengen. Es seien $\mathbf{A} = (\mathbf{E}_k)_{k\in I\cup J}$ und $\mathbf{B} = (\mathbf{F}_k)_{k\in I\cup J}$ Banachräume. Es seien $\mathscr{L}(\mathbf{A};\mathbf{B}) := \prod_{i\in I}\mathscr{L}(\mathbf{E}_i;\mathbf{F}_i) \times \prod_{j\in J}\mathscr{L}(\mathbf{F}_j;\mathbf{E}_j)$ und $(\mathbf{f}_k)_{k\in I\cup J} \in \mathscr{L}(\mathbf{A};\mathbf{B})$. D. h. $(\mathbf{f}_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathscr{L}(\mathbf{E}_i;\mathbf{F}_i)$ und $(\mathbf{f}_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J}\mathscr{L}(\mathbf{F}_j;\mathbf{E}_j)$. Eine Zuordnung $\boldsymbol{\Omega}:\mathbf{A}\cup\mathbf{B} \to \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})$, wobei $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})$ ein Banachraum ist, heißt tensorielle Konstruktion vom Typ (I,J), wenn gilt: $(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{f}_k))_{k\in I\cup J} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{A});\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{B}))$ erfüllt $\boldsymbol{\Omega}(1_{\mathbf{A}}) = 1_{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{A})}$, $\boldsymbol{\Omega}(1_{\mathbf{B}}) = 1_{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{B})}$ und $\boldsymbol{\Omega}((\mathbf{f}_k\circ\mathbf{g}_k)_{k\in I\cup J}) = ((\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{f}_k)\circ\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{g}_k))_{k\in I\cup J}$. Darüber hinaus ist die induzierte Abbildung $\boldsymbol{\Omega}:\mathscr{L}(\mathbf{A};\mathbf{B}) \to \mathscr{L}(\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{A});\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{B}))$ von der Klasse C^r, $r \geq 1$.

Bemerkung

Da wir nur zusammenhängende Mannigfaltigkeiten betrachten, ist hier stets $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Proposition 2.5.2

Es sei $\boldsymbol{\Omega}$ eine tensorielle Konstruktion vom Typ (I,J). Es sei $X = \left(\boldsymbol{\xi}_b^k\right)_{k\in I\cup J}$ eine Familie von Vektorraumbündeln über B mit der Familie von typischen Fasern $(\mathbf{G}_k)_{k\in I\cup J}$. Es sei

$$\boldsymbol{\Omega}(X) = \coprod_{b\in B}\boldsymbol{\Omega}(X_b),\ \text{wobei}\ X_b = \left(\boldsymbol{\xi}_b^k\right)_{k\in I\cup J}.$$

Dann hat $\boldsymbol{\Omega}(X)$ eine eindeutige Vektorraumbündelstruktur über der Basis B mit $\boldsymbol{\Omega}(X_b) = \boldsymbol{\Omega}(\left(\boldsymbol{\xi}_b^k\right)_{k\in I\cup J})$. Die Projektion $\boldsymbol{\pi}:\boldsymbol{\Omega}(X) \to B$ ist definiert durch $\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{\Omega}(X_b)\right) = b$ und die Trivialisierung ist über die Trivialisierungen $(\boldsymbol{\pi}_k^{-1}(V),\ H_V^k,\ \mathbf{G}_k)$, $V \in \mathscr{O}_k$ von $\boldsymbol{\xi}^k$ wie folgt gegeben:

$$H_V^{\mathbf{\Omega}}:\boldsymbol{\pi}^{-1}(V)\to h_V(V)\times\mathbf{\Omega}\left((\mathbf{G}_k)_{k\in I\cup J}\right)$$

mit

$$H_V^{\mathbf{\Omega}}(\mathbf{v})=(h_V(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v})),\ \mathbf{\Omega}(\mathscr{H}_{(V,\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}))}).$$

Hierbei sind

$$\mathscr{H}_{(V,\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}))}=(\mathscr{H}^k_{(V,\boldsymbol{\pi}(v))})_{k\in I\cup J}$$

und

$$(\mathscr{H}^i_{(V,\boldsymbol{\pi}(v))})_{i\in I}=(((H_V^i)^{-1}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}),\bullet)^{-1})_{i\in I},\quad (\mathscr{H}^j_{(V,\boldsymbol{\pi}(v))})_{j\in J}=(((H_V^j)^{-1}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{v}),\bullet)^{-1})_{j\in J}.$$

Beweis

Wir haben nur zu prüfen, dass die Übergangsabbildungen Vektorraumbündelisomorphismen sind.

$$H_W^{\mathbf{\Omega}}\circ(H_V^{\mathbf{\Omega}})^{-1}(x,\mathbf{e})=(a_W^V(x),\mathbf{\Omega}((((H_W^k)^{-1}(h_W^{-1}(x),\bullet))^{-1}\circ(H_V^k)^{-1}(h_V^{-1}(x),\bullet))_{k\in I\cup J})(\mathbf{e}).$$

Die Behauptung folgt jetzt mit 2.5.1, wenn wir setzen:

$\mathbf{f}_i=((H_V^i)^{-1}(h_V^{-1}(x),\bullet))^{-1}\circ((H_W^i)^{-1}(h_W^{-1}(x),\bullet))^{-1}$, $\mathbf{f}_j=((H_W^j)^{-1}(h_W^{-1}(x),\bullet))^{-1}\circ((H_V^j)^{-1}(h_V^{-1}(x),\bullet))^{-1}$.

Beispiele

1. Whitney-Summe $\xi_1\oplus\cdots\oplus\xi_n$

Für $I=1,\ldots,n$ sei $\mathbf{\Omega}(\mathbf{A})=\mathbf{E}_1\times\cdots\times\mathbf{E}_n$. Es sei $\mathbf{\Omega}((\mathbf{f}_i)_{i\in I})=\mathbf{f}_1\times\cdots\times\mathbf{f}_n$. Das durch diese Konstruktion erhaltene Vektorraumbündel heißt ***Whitney-Summe*** und wird mit $\xi_1\oplus\cdots\oplus\xi_n$ bezeichnet. Es ist $\boldsymbol{\pi}^{-1}(b)=(\xi_1)_b\oplus\cdots\oplus(\xi_n)_b$.

2. Bündel der stetigen linearen Abbildungen $\mathscr{L}(\xi_1,\xi_2)$

Es sei $I=\{1\}$ und $J=\{2\}$. $\mathbf{\Omega}(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2)=\mathscr{L}(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2)$, $\mathbf{\Omega}(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2)(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{f}_2\circ\boldsymbol{\alpha}\circ\mathbf{f}_1$ für $\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{L}(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2)$. Dieses neue Vektorraumbündel heißt auch Vektorraumbündel der *B*-Morphismen und wird mit $\mathscr{L}(\xi_1;\xi_2)$ bezeichnet.

3. Tensorbündel $\mathscr{L}_k^l(\xi^*,\xi,\eta)$

Es seien $I=1,\ldots,k$ und $J=1,\ldots,l+1$. Jetzt definieren wir $\mathbf{\Omega}$ durch $\mathbf{\Omega}(\mathbf{E}'_1,\ldots,\mathbf{E}'_k,\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_{i+1})=\mathscr{L}_k^l(\mathbf{E}',\mathbf{E};\mathbf{E}_{l+1})$, wobei $\mathbf{E}'_1=\cdots=\mathbf{E}'_k=\mathbf{E}'$ und $\mathbf{E}_1=\cdots=\mathbf{E}_l=\mathbf{E}$ ist. Für $\boldsymbol{\gamma}\in\mathscr{L}_k^l(\mathbf{E}',\mathbf{E};\mathbf{E}_{l+1})$ sei $\mathbf{\Omega}((\mathbf{f}_k)_{k\in I\cup J})(\boldsymbol{\gamma})=(\mathbf{f}_{k+1}\circ\boldsymbol{\gamma}\circ((\prod_{i=1}^k\mathbf{f}_i)\times(\prod_{j=1}^l\mathbf{f}_j))$. Dieses Vektorraumbündel heißt Tensorbündel und wird mit $\mathscr{L}_k^l(\xi^*,\xi;\eta)$ bezeichnet.

Aufgabe:

Führen Sie die Einzelheiten zu den drei Konstruktionen durch.

2.6 Exakte Bündelsequenzen

Definition 2.6.1
Es sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension r, und es seien $\boldsymbol{\tau} := (X,\boldsymbol{\pi},M)$, $\boldsymbol{\rho} := (Y,\boldsymbol{\sigma},M)$ zwei Vektorbündel über M. Es sei $(f,1_M):\boldsymbol{\tau}\to\boldsymbol{\rho}$ ein Vektorbündel-Morphismus.

Wir sagen, dass die folgende ***Sequenz*** $\mathbf{o}\to\boldsymbol{\tau}\xrightarrow{(f,1_M)}\boldsymbol{\rho}$ ***exakt*** ist, wenn es eine offene Überdeckung $\mathcal{O}\in Cov(M)$ gibt und es für jedes $V\in\mathcal{O}$ Trivialisierungsabbildungen

$$H_V : X_V \to V\times\mathbf{E} \text{ und } K_V : Y_V \to V\times\mathbf{F} \text{ gibt,}$$

so dass $\mathbf{F}=\mathbf{E}\times\mathbf{G}$ und folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccccc}
X_V & \xrightarrow{f} & Y_V & & \\
\downarrow H_V & & \downarrow K_V & & \\
V\times\mathbf{E} & \longrightarrow & V\times\mathbf{E}\times\mathbf{G} & \xrightarrow{pr} & V\times\mathbf{E} \\
(x,\mathbf{e}) & \mapsto & (x,\mathbf{e},\mathbf{0}) & \mapsto & (x,\mathbf{e})
\end{array}$$

Lokal ist f injektiv.

Es sei nun $\boldsymbol{\tau}' := (X',\boldsymbol{\pi}',M')$ ein weiteres Vektorraumbündel. Es sei $g:\boldsymbol{\tau}'\to\boldsymbol{\rho}$ ein Vektorbündel-Morphismus mit $g(X')\subset f(X)$. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung $g':X'\to X$, so dass $g=f\circ g'$ und g' ist ein Vektorbündel-Morphismus. Es ist $g'=H_V^{-1}\circ pr\circ K_V\circ g$.

Dual hierzu heißt die Sequenz $\boldsymbol{\tau}\xrightarrow{(f,1_M)}\boldsymbol{\rho}\to\mathbf{0}$ exakt, falls f surjektiv ist und folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_V & \xrightarrow{f} & Y_V \\
 & & \downarrow H_V & & \downarrow K_V \\
V\times\mathbf{E} & \xrightarrow{j_{\mathbf{g}}} & V\times\mathbf{E}\times\mathbf{G} & \longrightarrow & V\times\mathbf{E} \\
(x,\mathbf{e}) & \mapsto & (x,\mathbf{e},\mathbf{g}) & \mapsto & (x,\mathbf{g})
\end{array}$$

Definition 2.6.2
Es sei $\boldsymbol{\tau} := (X,\boldsymbol{\pi},M)$ ein Vektorbündel. Eine Teilmenge $S\subset X$ definiert ein ***Unterbündel*** $\boldsymbol{\tau}_S := (S,\boldsymbol{\pi}_S,M)$, falls es eine exakte Sequenz $\mathbf{o}\to\boldsymbol{\tau}_S\xrightarrow{(f,1_M)}\boldsymbol{\tau}$ gibt mit $f(X')=S$. Das Vektorbündel $\boldsymbol{\tau}_S$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis:
Sei $\mathbf{o}\to\boldsymbol{\zeta}\xrightarrow{g}\boldsymbol{\tau}$ ein weiteres Vektorbündel mit $g(Y)=S$. Dann ist $f^{-1}\circ g:Y\to X'$ ein Vektorbündel-Isomorphismus (C^r-Diffeomorphismus).

Satz 2.6.3 ***Faktorbündel***

Es seien $\boldsymbol{\tau} := (X,\boldsymbol{\pi},M)$ und $\boldsymbol{\rho} := (Y,\boldsymbol{\sigma},M)$ zwei Vektorbündel. Sei $\mathbf{o}\to\boldsymbol{\rho}\xrightarrow{(h,1_M)}\boldsymbol{\tau}$ exakt.

Sei $X/Y := \bigcup_{x\in M} X_x/Y_y$ und $\mathcal{O} \in Cov(M)$. $L_V : X_V/Y_V \to V \times \mathbf{G}$, wobei $X_V = V \times \mathbf{E} \times \mathbf{G}$, $Y_V = V \times \mathbf{E}$ ist eine Bijektion, die $\boldsymbol{\tau}/\boldsymbol{\rho} := (X/Y, \boldsymbol{\gamma}, M)$ zu einem Vektorraumbündel macht.

Beweis
Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass $h : Y \to X$ die Inklusion ist. Es seien $V, W \in \mathcal{O}$ und $x \in V \cap W$. Dann ist $G_W^V(x)$ repräsentiert durch

$$H(x) = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & h_{22}(x) \\ h_{12}(x) & h_{22}(x) \end{pmatrix}$$

auf $\boldsymbol{\tau}$ mit $H(x)\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ für $(v,w) \in \mathbf{E} \times \mathbf{G}$. Die Abbildung $(L_W \circ L_V^{-1})_x$ auf $\mathbf{G}$ ist durch $H(x)$ induziert. Da $\mathbf{E} \cong \mathbf{E} \times \{\mathbf{0}\}$ invariant unter $H(x)$ ist, schließen wir $h_{12}(x) = \mathbf{0}$. Ist H_V Trivialisierungsabbildung für $\boldsymbol{\tau}$, so ist $(H_W \circ H_V^{-1})_x$ invers zu $(H_V \circ H_W^{-1})_x$ und damit $h_{22}(x)$ ein Automorphismus, der stetig und linear ist. Darüber hinaus repräsentiert $h_{22}(x)$ die Abbildung $(L_W \circ L_V^{-1})_x$.

Damit sind die Voraussetzungen der Proposition 2.4.1.2 erfüllt und $\boldsymbol{\tau}/\boldsymbol{\rho}$ ist ein Vektorraumbündel.

Die kanonische Abbildung $k_{\boldsymbol{\rho}} : \boldsymbol{\tau} \to \boldsymbol{\tau}/\boldsymbol{\rho}$, genauer $k_V X_V \to X_V/Y_V$ ist ein Morphismus, da folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X_V & \xrightarrow{k_V} & X_V/Y_V \\ \downarrow H_V & & \downarrow L_V \\ V \times \mathbf{E} \times \mathbf{G} & \longrightarrow & V \times \mathbf{G} \\ (x, \mathbf{e}, \mathbf{g}) & \mapsto & (x, \mathbf{g}) \end{array}$$

Folglich ist $k_{\boldsymbol{\rho}}$ ein Vektorbündel-Morphismus und $\boldsymbol{\tau}/\boldsymbol{\rho}$ heißt ***Faktorbündel***. Wir suchen jetzt hinreichende Bedingungen dafür, dass $\mathbf{o} \to \boldsymbol{\tau} \to \boldsymbol{\rho}$ (bzw. $\boldsymbol{\tau} \to \boldsymbol{\rho} \to \mathbf{o}$) exakt ist.

Satz 2.6.4
Es seien $\boldsymbol{\tau} := (X, \boldsymbol{\pi}, M)$, $\boldsymbol{\rho} := (Y, \boldsymbol{\sigma}, M)$ Vektorraumbündel. Es sei $f : X \to Y$ ein Vektorbündel-Morphismus. Ist für jedes $x \in M$ die stetige lineare Abbildung $f_x : X_x \to Y_x$ injektiv und spaltend, dann ist $\mathbf{o} \to \boldsymbol{\tau} \xrightarrow{f} \boldsymbol{\rho}$ exakt.

Beweis:
Es sei $\mathbf{E}$ die Faser von X und $\mathbf{F}$ die Faser von Y. Es sei $x \in M$. Die Bedingung f_x spaltet, ist äquivalent zu der Aussage, dass $\mathbf{F} = \mathbf{E} \times \mathbf{G}$ ist. Ferner es eine offene Umgebung V mit $a \in V$ gibt und $H_V : \boldsymbol{\pi}^{-1}(V) \to V \times \mathbf{E}$, $K_V : \boldsymbol{\sigma}^{-1}(V) \to V \times \mathbf{F}$ trivialisierende Abbildungen sind. Die Abbildung

$$\mathbf{E} \xrightarrow{H_{V,\boldsymbol{\alpha}}^{-1}} X_x \xrightarrow{f_{\boldsymbol{\alpha}}} Y_x \xrightarrow{K_{V,x}} \mathbf{E} \times \mathbf{G}$$

bilden $\mathbf{E}$ auf $\mathbf{E} \times \{\mathbf{0}\}$ ab, da f_x injektiv ist.

Die Abbildung $(K_V \circ f \circ H_V^{-1})_x : \mathbf{E} \to \mathbf{E} \times \mathbf{G}$ korrespondiert zu der Darstellung durch stetige lineare Abbildungen h_{11}, h_{12} mit $(h_{11}(x), h_{12}(x)) \in \mathbf{E} \times \mathbf{G}$.

Wir definieren $H(x) := \begin{pmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) \\ 0 & id \end{pmatrix}$. $H(x)$ repräsentiert die Abbildung $h(x) : \mathbf{E} \times \mathbf{G} \to \mathbf{E} \times \mathbf{G}$ mit $H(x)\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ für $(v,w) \in \mathbf{E} \times \mathbf{G}$. $h(x)_{|\mathbf{E}\times\{\mathbf{0}\}}$ stimmt mit $u_1 \circ (K_V \circ f \circ H_V^{-1})_x$ überein $u_1(v) = (v,0)$. Folglich ist die Abbildung $x \mapsto h(x)$ ein Morphismus von V in $\mathcal{L}(\mathbf{E},\mathbf{E})$. Da sie insbesondere stetig ist, bildet sie $V \subset V \cap W$ in die Gruppe der stetigen linearen Automorphismen ab. Aus Proposition 2.4.1.2 folgt die Behauptung.