Ausgewählte Literatur

Abraham/Marsden	Foundation of Mechanics. Benjamin, 1981
Abraham/Marsden	Tensor Analysis and Applications. Addison Wesley, 1983
Abraham/Robbin	Transversal Mappings and Flows. Benjamin, 1967
Bishop/Cittenden	Geometry of Manifolds. Academic Press, 1964
Bourbaki	General Topology. Part I and II
Bourbaki	Topological Vector Spaces. Chapter 1 – 5, Springer, 1987
Bourbaki	Variétés Differentielles et Analytiques. Hermann, 1982
Bröcker/Jänich	Einführung in die Differentialtopologie. Springer, 1973
Cartan	Differentialrechnung. BI Verlag, 1973
Cartan	Differentialformen. BI Verlag, 1973
Chaquet	Géométrie différentielle et systèmes extérieure. 1968
Chaquet/Witt/Dillard	Analysis, Manifolds and Physics. North Holland, 1977
Dieudonné	Grundzüge der modernen Analysis. Band I, II und IV, Vieweg
Gallot/Hulin/Lafountaine	Riemannian Geometry. Springer, 1987
Greub/Halperin/Vanstone	Connections, Curvature and Cohomology. Academic Press
Guillemin/Pollack	Differential Topology. Prentice-Hall, Inc. 1974
Herman	Geometry, Physics and Systems. M. Dekker, 1973
Hollmann/Rummler	Alternierende Differentialformen. BI Verlag, 1972
Klingenberg	Riemannian Geometry. de Gruyter, 1982
Kobayashi/Nomitzu	Foundation of Differential Geometry. Band I und II, John Wiley, 1969
Lang	Differential Manifolds. Addison Wesley, 1972
Lovelock/Rund	Tensors, Differential Forms and Variational Principels. John Wiley, 1975
Matsushima	Differential Manifolds. M. Dekker, 1972
Maurin	Analysis I and II. D. Reidel Pub. Comp., 1978
Milnor	Topology from the differentiable Viewpoint. The University Press of Virginia Charlottesville.
O'Neill	Semi-Riemannian Geometry. Academic Press, 1983
Osborn	Vector-Bundles. Vol I, Academic Press, 1982
Rham, de	Variétés Différentielle. Hermann, 1969
Sternberg	Lectures on differential Geometry. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
Spivak	A comprehensive Introduction to Differential Geometry, I – V. Publish or Perish, 1979/80
Straumann	Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie. In Lecture Notes in Physics.
Triebel	Analysis und mathematische Physik. Hauser, 1981
Vaizman	Cohomology and Differential Forms. M. Dekker, 1975
Vaizman	Differential Geometry. M. Dekker, 1980
Walter	Differentialgeometrie. BI Verlag,
Weyl	Raum, Zeit Materie. Allgemeine Relativitätstheorie. Springer
Westenholz	Differential Manifolds in Physics.
Yano	Integral Formulas in Riemannian Geometries. M. Dekker, 1970
Yano/Ishihara	Tangent and Cotangent Bundles, Differential Geometries. M. Dekker, 1973

0.1. TOPOLOGISCHE GRUNDBEGRIFFE

Definition 0.1.1

1. Es seien X eine Menge und $2^X := \{Y | Y \subseteq X\}$ die Potenzmenge von X. Eine Teilmenge $\tau \subseteq 2^X$ heißt ***TOPOLOGIE*** auf X und das Paar (X, τ) ein ***TOPOLOGISCHER RAUM***, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $\emptyset \in \tau$ und $X \in \tau$.

b) Für jede Teilmenge $\omega \subseteq \tau$ ist $\bigcup_{S \in \omega} S \in \tau$.

c) Für jede endliche Teilmenge $\theta \subseteq \tau$ ist $\bigcap_{T \in \theta} T \in \tau$.

Die Elemente von τ heißen ***OFFENE*** Mengen.

2. Es sei (X, τ) ein topologischer Raum. Es sei $\tau^* := \tau \setminus \emptyset$.

a) Für $x \in X$ heißt $\mathcal{U}(x) := \{U \in \tau | x \in U\}$ ***UMGEBUNGSSYSTEM*** aller offenen Mengen um x.

b) (X, τ) heißt ***HAUSDORFF-RAUM***, wenn für je zwei verschiedene Elemente x und y ein $U \in \mathcal{U}(x)$ und ein $V \in \mathcal{V}(y)$ existiert mit $U \cap V = \emptyset$.

c) $\mathcal{B} \subseteq \tau$ heißt ***BASIS*** der Topologie τ, wenn zu jeder offenen Menge $U \in \tau$ eine Teilmenge $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ existiert, so dass $U = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$.

d) (X, τ) hat eine ***ABZÄHLBARE BASIS***, wenn die Basis $\mathcal{B}$ abzählbar ist.

e) $\mathcal{B}$ heißt ***SUBBASIS***, wenn $\mathcal{B}^* := \{B | B = \bigcap_{U \in I} U, I \subseteq \mathcal{B} \text{ ist endlich}\}$ Basis dieser Topologie ist.

f) $Cov(X) := \{ \mathcal{W} \subseteq \tau \mid \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W \}$ heißt ***ÜBERDECKUNGSSYSTEM*** von X und $\mathcal{V} \in Cov(X)$ heißt eine ***OFFENE ÜBERDECKUNG***. Beachte: $\{X\} \in Cov(X)$.

g) (X, τ) heißt ***KOMPAKT***, wenn für jedes $\mathcal{U} \in Cov(X)$ ein endliches $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ existiert mit $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$.

h) (X, τ) heißt ***ZUSAMMENHÄNGEND***, wenn je zwei nichtleere offene Mengen $U, V \in \tau$ mit $U \cup V = X$ einen nichtleeren Durchschnitt haben.

i) Ein Punkt $x \in X$ heißt ***HÄUFUNGSPUNKT*** (***HP***) von $Y \subseteq X$, wenn jede offene Umgebung U von x mindestens einen von x verschiedenen Punkt mit Y gemeinsam hat.

j) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt ***ABGESCHLOSSEN***, wenn $X \setminus A \in \tau$ ist.

k) Für eine Menge $B \subseteq X$ heißt $\overline{B} = \bigcap_{\substack{A \supseteq B \\ X \setminus A \in \tau}} A$ der ***TOPOLOGISCHE ABSCHLUSS*** der Menge B.

l) Es sei $Y \subseteq X$ eine Menge. Das System $\tau_Y := \{U \cap Y | U \in \tau\}$ heißt ***INDUZIERTE*** oder ***RELATIVE*** Topologie. **Achtung!** Es ist $\tau_X = \tau$.

m) Seien (X,τ) ein topologischer Raum, Y eine Menge und $f: X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Das System $\tau_f := \{A \subseteq Y | f^{-1}(A) \in \tau\}$ heißt die durch f induzierte ***FAKTORTOPOLOGIE*** auf Y.
Achtung! für l) betrachte $j: Y \to X$ mit $j(y) = y$.

n) (X,τ) heißt ***LOKALKOMPAKT***, wenn jeder Punkt *x* eine offene Umgebung besitzt, deren Abschluss kompakt ist.

o) Eine offene Überdeckung $\mathcal{U} \in Cov(X)$ heißt ***LOKAL-ENDLICH***, wenn es zu jedem Punkt *x* eine Menge $U \subseteq X$ gibt, die nur endlich viele $V \in \mathcal{U}$ trifft, die *x* enthalten.

p) Es seien $\mathcal{U},\mathcal{V} \in Cov(X)$ heißt eine ***VERFEINERUNG*** von $\mathcal{V}$, wenn für jede offene Umgebung $U \in \mathcal{U}$ eine offene Umgebung $V \in \mathcal{V}$ mit $U \subseteq V$ existiert.

q) $X \in \tau$ heißt ***PARAKOMPAKT***, wenn jede offene Überdeckung eine lokal-endliche Verfeinerung besitzt.

r) Es sei (X,τ) ein topologischer Raum. Es sei $f: X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Die Menge $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in X | f(x) \neq 0\}}$ heißt der ***TRÄGER*** von *f*.

3. Es sei $f: X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Es sei $x \in X$.

a) f heißt ***STETIG IN*** *x*, wenn es zu jeder offenen Umgebung V von $f(x)$ eine offene Umgebung U von x gibt, so dass $f(U) \subseteq V$ ist.

b) f heißt ***STETIG***, wenn f in allen Punkten *x* stetig ist.

c) f heißt ***HOMÖOMORPHISMUS***, wenn f stetig und bijektiv sowie f^{-1} stetig ist.

Satz 0.1.2

Es sei (X,τ) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge.

a) Ist *X* kompakt und *Y* abgeschlossen, so ist Y kompakt.

b) Ist *X* ein Hausdorff-Raum und Y kompakt, dann ist Y abgeschlossen.

Beweis

a) Es sei $\mathcal{U} \in Cov(X)$. Zu $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein $V_U \in \tau$ mit $U = V_U \cap Y$, da Y die Relativtopologie trägt. Es ist $\mathcal{V} = \{V_U | U \in \mathcal{U}\} \cup \{X \setminus Y\} \in Cov(X)$, da $X \setminus Y$ offen. Nach Voraussetzung ist X kompakt. Folglich finden wir endlich viele $V_U \in \tau$ die X überdecken. Dies liefert $\mathcal{U}' = \{U \in \mathcal{U} \,|\, V_U \text{ endlich}\} \in Cov(Y)$. Also ist Y kompakt.

b) Nach Voraussetzung ist Y kompakt. Folglich gibt es $U_1,\ldots,U_r$, die Y überdecken. Da X ein Hausdorff-Raum ist, gibt es zu jedem $p \in X \setminus Y$ und $i \in \{1,\ldots,r\}$ eine offene Umgebung $V_i \in \mathcal{U}(p)$ mit $V_i \cap U_i = \emptyset$. Dann ist $V_p := \bigcap_{i=1}^{r} V_i$ offen mit $p \in V_p$ sowie nach Konstruktion $V_p \cap Y = \emptyset$. Wir erhalten $X \setminus Y = \bigcup_{p \in X \setminus Y} V_p \in \tau$ ist offen und damit Y abgeschlossen.

Satz 0.1.3

Es seien (X,τ_X), (Y,τ_X) topologische Räume. Es sei $f: X \to Y$ eine Abbildung.

a) f ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge V in Y das Urbild $f^{-1}(V)$ eine offene Menge ist.

Es sei *f* stetig.

b) Mit X ist auch $f(X)$ kompakt.

c) Mit X ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis

a) f ist stetig: Es sei $V \in \mathcal{V}(f(\boldsymbol{x}))$ eine offene Menge in Y. Da f stetig, gibt es eine offene Menge $U_{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{U}(\boldsymbol{x})$ in X mit $f(U_{\boldsymbol{x}}) \subseteq V$. Folglich ist $U_{\boldsymbol{x}} \subseteq f^{-1}(V)$ und $f^{-1}(V) = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in f^{-1}(V)} U_{\boldsymbol{x}}$ offen. (D 0.1.1 (1.b))

Für jede offene Menge V in Y ist das Urbild $f^{-1}(V)$ eine offene Menge: Da $f\left(f^{-1}(V)\right) \subseteq V$ immer gilt, ist f stetig.

b) Es sei $\mathcal{V} \in Cov(Y)$. Wir setzen $\mathcal{V}_{|f(X)} = \{V \in \mathcal{V} | V \cap f(X) \neq \emptyset\}$. Dann ist $\mathcal{V}_{|f(X)} \in Cov(f(X))$ und $f^{-1}\left(\mathcal{V}_{|f(X)}\right) \in Cov(X)$, da f stetig ist. Nach Voraussetzung ist X kompakt. Folglich gibt es endliches $\mathcal{W} \subseteq f^{-1}\left(\mathcal{V}_{|f(X)}\right)$ mit $\mathcal{W} \in Cov(X)$. Damit ist $f(\mathcal{W}) \in Cov(f(X))$.

c) Es seien V, W offene Mengen in Y mit $f(X) \subseteq V \cup W$. Wir erhalten $X = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$ mit offenen Mengen $f^{-1}(V)$ und $f^{-1}(W)$, da f stetig ist. Nach Voraussetzung (X ist Hausdorff-Raum) gilt $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) \neq \emptyset$. Daraus folgt sofort $V \cap W \neq \emptyset$, was zu zeigen war.

Satz 0.1.4

Es seien (X,τ_X), (Y,τ_X) topologische Räume. *X* sei kompakt und *Y* ein Hausdorff-Raum.

Dann ist jede stetige, bijektive Abbildung $f: X \to Y$ ein Homöomorphismus.

Beweis

Wir haben zu zeigen, dass f^{-1} stetig ist. Nach 0.0.1 3a) genügt: Ist U offen in X, so ist $\left(f^{-1}\right)^{-1}(U) = f(U)$ offen in Y. Sei also U offen in X. Wegen $X \setminus (X \setminus U) = U$ ist $X \setminus U$ abgeschlossen und damit nach 0.1.2 a) kompakt. Nach 0.1.3 b) ist dann auch $f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$ kompakt und mit 0.1.2 b) (Y ist Hausdorff-Raum) auch abgeschlossen. Folglich ist $f(U) = \left(f^{-1}\right)^{-1}(U)$ offen.

Satz 0.1.5 (Lindelöf)

Es sei (X,τ) ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis $\mathcal{B}$. Dann enthält jede offene Überdeckung von X eine abzählbare offene Überdeckung von *X*.

Beweis als Übungsaufgabe

Bemerkung:

Es seien (X,τ_X), (Y,τ_X) topologische Räume. Ist $X_0 \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist $f : X_0 \to Y$ genau dann stetig, wenn für jede offene Menge V in Y auch $f^{-1}(V)$ offen in der Relativtopologie, also $f^{-1}(V) \in (\tau_X)_{X_0}$ ist.

Übungen:

1. Zeigen Sie: Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

2. Es sei $f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ eine lineare Abbildung zweier normierter Vektorräume. Zeigen Sie: f ist genau dann stetig, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R},\ c \geq 0$ gibt mit $\|f(\boldsymbol{x})\| \leq c \cdot \|\boldsymbol{x}\|$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}$.

3. Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist stetig bzgl. jeder Norm.

4. Es sei $f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ eine stetige lineare Abbildung zweier Banachräume. Dann gilt:

a) $\|f(\boldsymbol{x})\| \leq \|f\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$

b) $\|f\| = \sup\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|f(\boldsymbol{x})\| = \sup\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\leq 1} \|f(\boldsymbol{x})\| \leq \sup\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\neq 0} \frac{\|f(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$

5. Zeigen Sie: $\left(\mathscr{C}(\overline{I},\mathbb{R}), \|\ \|_\infty\right)$ ist vollständig, aber $\left(\mathscr{C}(\overline{I},\mathbb{R}), \|\ \|_1\right)$ nicht.

6. Ist $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, so gilt die Isometrie $\mathscr{L}(\mathbb{K},\mathbf{F}) \cong \mathbf{F}$.

7. Beweisen Sie Korollar 0.2.19.

0.2. Normierte Vektorräume über einem beliebigen kommutativen Körper $\mathbb{K}$

Definition 0.2.1

Es sei $\mathbf{E}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine ***Norm*** auf $\mathbf{E}$ ist eine Abbildung $\| \ \| : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften.

(i) $\bigwedge_{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}} \|\boldsymbol{x}\| \geq 0$

(ii) $\bigwedge_{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}} \|\boldsymbol{x}\| = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = 0$

(iii) $\bigwedge_{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}} \bigwedge_{k \in \mathbb{K}} \|k\boldsymbol{x}\| = |k| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$

(iv) $\bigwedge_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{E}} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so heißt das Paar $(\mathbf{E}, \| \ \|)$ ein ***normierter*** $\mathbb{K}$ ***-Vektorraum***.

Definition 0.2.2

Eine Folge $(\boldsymbol{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(\mathbf{E}, \| \ \|)$ heißt genau dann ***Cauchy-Folge***, kurz ***CF***, wenn

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{S \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n, m \geq S} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m\| < \varepsilon .$$

Der normierte $\mathbb{K}$-Vektorraum heißt genau dann vollständig, wenn jede ***CF*** in $(\mathbf{E}, \| \ \|)$ konvergiert. Vollständig normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume heißen ***Banachräume***.

Definition 0.2.3

Es sei f eine Abbildung von $(\mathbf{E}, \| \ \|_{\mathbf{E}})$ in $(\mathbf{F}, \| \ \|_{\mathbf{F}})$.

(i) f heißt genau dann ***stetig*** in $a \in \mathbf{E}$, wenn

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta(a) > 0} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_{\mathbf{E}} < \delta(a) \Rightarrow \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon .$$

(ii) f heißt genau dann ***gleichmäßig stetig*** in $a \in \mathbf{E}$, wenn

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_{\mathbf{E}} < \delta \Rightarrow \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon .$$

Korollar 0.2.4

Die Abbildung $\| \ \|_{\mathbf{E}} : (\mathbf{E}, \| \ \|_{\mathbf{E}}) \to (\mathbb{R}, | \ |)$ ist stetig.

Beweis

Wir setzen $\| \ \| := \| \ \|_{\mathbf{E}}$. Aus $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}\| \underset{0.2.1.(iv)}{\leq} \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}\|$ folgt $\|\boldsymbol{a}\| - \|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}\|$. Ferner aus $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\| \underset{0.2.1.(iv)}{\leq} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{a}\|$ auch $\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{a}\| \leq \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}\|$, also $\big| \|\boldsymbol{a}\| - \|\boldsymbol{x}\| \big| \leq \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}\|$.

Aus 0.2.3 folgt die Behauptung für $\varepsilon = \delta$.

Definition 0.2.5

Es seien $\left(\mathbf{E}_i, \| \ \|_i\right)$ normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann ist durch $\left\|\left(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\right)\right\| := \sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{x}_i\|_{\mathbf{E}_i}$ eine Norm auf $\mathbf{E} := \prod_{i=1}^{n}\mathbf{E}_i$ definiert. Der normierte $\mathbb{K}$-Vektorraum heißt ***NORMIERTER PRODUKTRAUM***.

Weisen Sie nach, dass hierdurch eine Norm definiert wird.

Bemerkung 0.2.6

Jede Norm auf einem auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum definiert eine Topologie. Zeigen Sie, dass durch $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ eine Metrik definiert wird.

$K_{\mathbf{E}}(\boldsymbol{a},r) := \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{E} \,|\, d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) < r\right\}$, $r>0$ heißt ***OFFENE KUGEL*** und $K'_{\mathbf{E}}(\boldsymbol{a},r) := \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{E} \,|\, d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) \le r\right\}$, $r>0$ heißt ***ABGESCHLOSSENE KUGEL*** vom Radius r.

Zeigen Sie auch: Die offenen Kugeln bilden eine Basis für eine Topologie, die Hausdorff ist.

Beispiele 0.2.7

1. $\mathbb{R}^n$ versehen mit den Normen $\|\boldsymbol{x}\|_1^2 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$, $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$, $\|\boldsymbol{x}\|_3 = \sup_{1\le i\le n}|x_i|$.

2. Es sei X ein topologischer Raum und $\mathscr{C}_{\mathscr{B}}(X,\mathbb{R}) = \left\{f : X\to\mathbb{R} \,|\, f \text{ stetig, } \sup_{x\in X}|f(x)| < \infty\right\}$.

Durch $\|f\|_{\sup} := \sup_{x\in X}|f(x)|$ ist eine Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathscr{C}_{\mathscr{B}}(X,\mathbb{R})$ definiert.

Folglich ist $\left(\mathscr{C}_{\mathscr{B}}(X,\mathbb{R}), \| \ \|_{\sup}\right)$ ein Banachraum.

3. Ersetzen wir $\mathbb{R}$ durch einen normierten Banachraum $\left(\mathbf{F}, \| \ \|_{\mathbf{F}}\right)$ und definieren $\|f\|_{\sup} := \sup_{x\in X}\|f(x)\|$, so ist auch $\left(\mathscr{C}_{\mathscr{B}}(X,\mathbf{F}), \| \ \|_{\sup}\right)$ ein Banachraum.

4. Es sei X ein topologischer Raum und $\mathscr{B}(X,\mathbb{R}) := \left\{f : X\to\mathbb{R} \,|\, \sup_{x\in X}|f(x)| < \infty\right\}$ Durch $\|f\|_{\mathscr{B}} := \sup_{x\in X}|f(x)|$ ist eine Norm auf $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ definiert. Folglich gilt: $\mathscr{C}_{\mathscr{B}}(X,\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ ist ein $\mathbb{K}$-Teilraum.

Satz 0.2.8

Für eine lineare Abbildung $f : \mathbf{E}\to\mathbf{F}$ zwischen normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen sind folgende Aussagen äquivalent.

a) f ist stetig in allen Punkten von $\mathbf{E}$.

b) f ist stetig in $\mathbf{0}\in\mathbf{E}$.

c) $\|f(\boldsymbol{x})\|_{\mathbf{F}}$ ist beschränkt in $K'(\mathbf{0},1)$.

Beweis: Übung!

Definition 0.2.9

Es seien normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Mit $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ sei die Menge aller ***STETIGEN LINEAREN ABBILDUNGEN*** von $\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ bezeichnet. Es ist folglich $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E},\mathbf{F})\subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ ein Teilraum aller linearen Abbildungen. Dieser Raum wird immer mit der Norm (vgl. 0.2.8) $\|f\|=\sup\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\le 1}\|f(\boldsymbol{x})\|$ versehen, wenn nichts anderes gesagt wird. Es gilt somit (vgl. 0.2.7 3.) $\|f(\boldsymbol{x})\|\le\|f\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$ für jedes $\boldsymbol{x}\in\mathbf{E}$.

Im Folgenden schreiben wir nur noch $\mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ statt $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E},\mathbf{F})$.

Satz 0.2.10

Es sei $\mathbf{E}$ ein Banachraum. Mit $\mathbf{F}$ ist auch $\mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ ein Banachraum.

Definition 0.2.11

Es sei $\mathbf{E}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zwei ***NORMEN*** $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ auf $\mathbf{E}$ heißen ***ÄQUIVALENT***, wenn die identische Abbildung $1_{\mathbf{E}}:\mathbf{E}\to\mathbf{E}$ bezüglich der Normen stetig ist. $1_{\mathbf{E}}:\mathbf{E}\to\mathbf{E}$ ist folglich bezüglich der verschiedenen Normen ein Homöomorphismus, d.h.

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\|1_{\mathbf{E}}(\boldsymbol{x})\|_1\le\|1_{\mathbf{E}}\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|_2=a\cdot\|\boldsymbol{x}\|_2 \text{ und } \|\boldsymbol{x}\|_2=\|1_{\mathbf{E}}(\boldsymbol{x})\|_2\le\|1_{\mathbf{E}}\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|_1=b\cdot\|\boldsymbol{x}\|_1,\ a,b\in\mathbb{R}.$$

Hierdurch wird eine Äquivalenzrelation für die verschiedenen Normen auf $\mathbf{E}$ definiert.

Satz 0.2.12

Es seien $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ zwei Normen auf $\mathbf{E}$. $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ sind genau dann äquivalent, wenn es zwei konstante reelle Zahlen $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$, $b>0$ gibt, so dass $\bigwedge\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{E}} a\cdot\|\boldsymbol{x}\|_1\le\|\boldsymbol{x}\|_2\le b\cdot\|\boldsymbol{x}\|_1$.

Satz 0.2.13

1. Auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum sind alle Normen äquivalent.
2. Jede lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen ist stetig.

Definition 0.2.15

Es seien $\mathbf{E}$ und $\mathbf{E}$ normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $f:\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ heißt genau dann ***ISOMORPHISMUS***, wenn f ein stetiger Homomorphismus ist und ein stetiger Homomorphismus $g:\mathbf{F}\to\mathbf{E}$ existiert mit $g\circ f=1_{\mathbf{E}}$ sowie $f\circ g=1_{\mathbf{F}}$. f ist also ein Homomorphismus und Homöomorphismus.

Beispiele 0.2.14

1. Es seien $(\mathbf{E},\|\ \|_{\mathbf{E}})$ und $(\mathbf{F},\|\ \|_{\mathbf{F}})$ zwei normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Auf $\mathbf{E}\times\mathbf{F}$ sind

   $\sup(\|\ \|_{\mathbf{E}},\|\ \|_{\mathbf{F}})$, $\|\ \|_{\mathbf{E}}+\|\ \|_{\mathbf{F}}$ und $\sqrt{\|\ \|_{\mathbf{E}}^2+\|\ \|_{\mathbf{F}}^2}$ äquivalent.

2. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Auf $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ seien die Normen $\| \ \|_\infty$ und $\| \ \|_{\text{int}}$ definiert durch $\|f\|_\infty := \sup_{t\in I} |f(t)|$ und $\|f\|_{\text{int}} := \int_I f(t)dt$. Diese Normen sind nicht äquivalent, denn $\left(\mathscr{C}(I,\mathbb{R}), \| \ \|_\infty\right)$ ist vollständig, $\left(\mathscr{C}(I,\mathbb{R}), \| \ \|_{\text{int}}\right)$ aber nicht.

Satz 0.2.16 (Banach)

Sind $\mathbf{E}$ und $\mathbf{E}$ Banachräume, so ist jede stetige lineare bijektive Abbildung $f:\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ ein Isomorphismus.

Definition 0.2.17

Eine Abbildung $f:\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ heißt genau dann ***Isometrie***, wenn f eine lineare Bijektion mit $\|f(\boldsymbol{x})\|_{\mathbf{F}} = \|\boldsymbol{x}\|_{\mathbf{E}}$ ist. Wegen $\|f\| = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbf{E}}\le 1} \|f(\boldsymbol{x})\|_{\mathbf{F}} = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbf{E}}\le 1} \|\boldsymbol{x}\|_{\mathbf{E}} \le 1$ ist f stetig nach 0.2.8, also ein Isomorphismus.

Beispiele 0.2.18

1. $\mathscr{L}(\mathbb{K},\mathbf{F})$
2. $\mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbb{K}) =: \mathbf{E}'$ ist der topologische Dualraum.
3. Ist $\mathbf{E}$ endlichdimensional, so ist $\mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbb{K}) = Hom_{\mathbb{K}}(\mathbf{E},\mathbb{K})$ also $\mathbf{E}' = \mathbf{E}^*$. Der topologische und der algebraische Dualraum stimmen überein.
4. Sind $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ endlichdimensional, so auch $\mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$.

Definition 0.2.19

Es sei $\mathbf{E} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i$ der Produktraum von $\mathbb{K}$-Vektorräumen $(\mathbf{E}_i)_{1\le i\le n}$. Dies ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum bzgl. der kanonischen Verknüpfungen.

1. Es sei $\iota_i:\mathbf{E}_i\to\mathbf{E}$ definiert durch $\iota_i(\boldsymbol{x}) := (0,\ldots,0,\underbrace{\boldsymbol{x}}_{i-\text{te Stelle}},0,\ldots,0)$ für jedes $1\le i\le n$. Wegen $\iota_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \iota_i(\boldsymbol{x}) + \iota_i(\boldsymbol{y})$ und $\iota_i(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\iota_i(\boldsymbol{x})$ für $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{E}$ heißt $\iota_i:\mathbf{E}_i\to\mathbf{E}$ ***i-te lineare Injektion***.

2. Es sei $\pi_i:\mathbf{E}\to\mathbf{E}_i$ definiert durch $\pi_i(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}_i$ für jedes $1\le i\le n$. Wegen $\pi_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \pi_i(\boldsymbol{x}) + \pi_i(\boldsymbol{y})$ und $\pi_i(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\pi_i(\boldsymbol{x})$ für $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{E}$ heißt $\pi_i:\mathbf{E}\to\mathbf{E}_i$ ***i-te lineare Projektion***.

3. Es gilt $\pi_i\circ\iota_j = \delta_j^i\cdot 1_{\mathbf{E}_j}$ und $(\iota_j\circ\pi_i)(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = (0,\ldots,0,\underbrace{\boldsymbol{x}_i}_{j-\text{te Stelle}},0,\ldots,0)$. Ferner $1_{\mathbf{E}} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i\circ\iota_i$.

4. Für jedes $\boldsymbol{a}\in\mathbf{E}$ sei $\kappa_i^{\boldsymbol{a}}:\mathbf{E}_i\to\mathbf{E}$ definiert durch $\kappa_i^{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_i) := \boldsymbol{a} + \iota_i(\boldsymbol{x}_i - \pi_i(\boldsymbol{a})) = (\boldsymbol{a}_1,\ldots,\underbrace{\boldsymbol{x}_i}_{i-\text{te Stelle}},\ldots,\boldsymbol{a}_n)$.

5. Eine Abbildung $f:\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ heißt genau dann ***n-linear*** (kurz ***multilinear***), wenn für jedes $\boldsymbol{a}\in\mathbf{E}$ und jedes $1\le i\le n$ die Komposition $f\circ\kappa_i^{\boldsymbol{a}}:\mathbf{E}_i\to\mathbf{F}$ linear ist.

Satz 0.2.20

Es sei $\mathbf{E}=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{E}_i$ der Produktraum von normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen $(\mathbf{E}_i)_{1\leq i\leq n}$. Es sei $\mathbf{F}$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Für eine n-lineare Abbildung $f:\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

a) f ist stetig in allen Punkten von $\mathbf{E}$.

b) f ist stetig in $\mathbf{0}\in\mathbf{E}$.

c) $\|f(\boldsymbol{x})\|_{\mathbf{F}}$ ist beschränkt im Produkt der Einheitskugeln $\prod_{i=1}^{n}K'_{\mathbf{E}_i}(\mathbf{0},1)$.

Bezeichnung 0.2.21

Es sei $\mathscr{L}(\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_n;\mathbf{F}):=\left\{f:\prod_{i=1}^{n}\mathbf{E}_i\to\mathbf{F}\mid f \text{ ist stetig und } n-\text{linear}\right\}$. Versehen mit der Norm $\|f\|:=\sup\limits_{\substack{\|\boldsymbol{x}_i\|\leq 1\\ 1\leq i\leq n}}\|f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)\|$ ist $\mathscr{L}(\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_n;\mathbf{F})$ genau dann ein Banachraum, wenn $\mathbf{F}$ ein Banachraum ist. Es gilt $\|f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)\|\leq\|f\|\cdot\prod_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{x}_i\|$.

Satz 0.2.22

Es seien $\mathbf{E},\mathbf{F}$ und $\mathbf{G}$ normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann gelten die Isometrien

$$\mathscr{L}(\mathbb{K},\mathbf{F})\cong\mathbf{F}$$

$$\mathscr{L}(\mathbf{E};\mathscr{L}(\mathbf{F};\mathbf{G}))\cong\mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{F};\mathbf{G})$$

Allgemein gilt für normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume $\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_n,\mathbf{F}$ die Isometrie

$$\mathscr{L}(\mathbf{E}_1;\mathscr{L}(\mathbf{E}_2;\ldots,\mathscr{L}(\mathbf{E}_n;\mathbf{F}))\cdots)\cong\mathscr{L}(\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_n;\mathbf{F})$$

0.3. Differentialrechnung in vollständig normierten Vektorräumen

Definition 0.3.1

Es seien $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ Banachräume. Es sei $U \subseteq \mathbf{E}$ offen und $f: U \to \mathbf{F}$ eine Abbildung.

f heißt genau dann ***DIFFERENZIERBAR IN*** $\boldsymbol{a} \in U$, wenn es ein $g \in \mathscr{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ und ein $r: \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ gibt, so dass für alle $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ in $V \subseteq U$, V offen, gilt:

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) + r(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \text{ mit } \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{\|r(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\|_{\mathbf{F}}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_{\mathbf{E}}} = 0.$$

Im endlichdimensionalen ist die Abbildung g immer stetig.

Für $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{\|r(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\|_{\mathbf{F}}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_{\mathbf{E}}} = 0$ schreiben wir $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \in o\left(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_{\mathbf{E}}\right)$.

Wir sagen auch für die Restfunktion $\bmod o\left(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\right)$ statt $\in o\left(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_{\mathbf{E}}\right)$.

Korollar 0.3.2

a) Die Abbildung $g \in \mathscr{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ ist eindeutig bestimmt. Sie wird, da sie von f und dem Punkt $\boldsymbol{a} \in U$ abhängt mit $f'(\boldsymbol{a})$ bezeichnet.

b) Ist f in $\boldsymbol{a} \in U$ differenzierbar, so ist f stetig in $\boldsymbol{a} \in U$.

Mithin ist f differenzierbar in $\boldsymbol{a} \in U$, so hat f die Darstellung

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \bmod o\left(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\right).$$

Soll die Definition etwas weiter gefasst werden, so ist vorher zu definieren, wann sich Funktionen berühren. Dies geschieht über den Kontakt.

Definition 0.3.3

Es seien $f_1: U \to \mathbf{F}$ und $f_2: U \to \mathbf{F}$ zwei stetige Funktionen. f_1 und f_2 ***KONTAKTIEREN IN*** $\boldsymbol{a} \in U$ von der Ordnung m, wenn $f_1(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x}) \in o\left(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|^m\right)$.

Sie ***KONTAKTIEREN TRANSVERSAL***, wenn $0 = m \neq 1$ und sie ***KONTAKTIEREN TANGENTIAL***, wenn $m \geq 1$.

In beiden Fällen gilt folglich $f_1(\boldsymbol{a}) = f_2(\boldsymbol{a})$. Für $m = 1$ gilt zusätzlich $f_1'(\boldsymbol{a}) = f_2'(\boldsymbol{a})$. Wir können daher auch für differenzierbare Abbildungen sagen: $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})$ und $f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$ kontaktieren von 1. Ordnung.

In manchen Fällen ist auch gefragt von welcher Ordnung die stetigen Funktionen $f_1: U \to \mathbf{F}$ und $f_2: U \to \mathbf{F}$ kontaktieren. Für welches m gilt die Aussage

$$\bigwedge_{n \leq m} f_1(\boldsymbol{x}) - f_2(\boldsymbol{x}) \in o\left(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|^n\right)?$$

Definition 0.3.4

Es seien $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ Banachräume. Es sei $U \subseteq \mathbf{E}$ offen und $f: U \to \mathbf{F}$ eine Abbildung.

Die Abbildung f heißt genau dann ***DIFFERENZIERBAR IN*** U wenn f in jedem Punkt von U differenzierbar ist. Folglich existiert zu $\boldsymbol{a} \in U$ ein $f'(\boldsymbol{a}) \in \mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$.

Es gibt daher eine Abbildung

$$h:\begin{cases} U \to \mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{F}) \\ \boldsymbol{a} \mapsto \quad f'(\boldsymbol{a}). \end{cases}$$

Da keine Verwechselungen auftreten können, wird $f' := h$ definiert.

Die Abbildung f heißt genau dann ***STETIG DIFFERENZIERBAR IN*** U oder ***AUS/VON DER KLASSE*** C^1, wenn

a) f in U differenzierbar,

b) $f':U \to \mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ stetig ist.

Korollar 0.3.5

Äquivalente Normen ergeben dieselben Ableitungen.

Rechenregel 0.3.6

Es seien $\mathbf{E},\mathbf{F}$ und $\mathbf{G}$ Banachräume sowie $U \subseteq \mathbf{E}$ und $V \subseteq \mathbf{F}$ offen. Es seien $f:U \to \mathbf{F}$ und $g:V \to \mathbf{G}$ Abbildungen. Für $\boldsymbol{a} \in U$ sei $f(\boldsymbol{a}) \in V$. Mit $U' := f^{-1}(V)$ ist $g \circ f : U' \to \mathbf{G}$ definiert.

1. Ist f in $\boldsymbol{a}$ und g in $f(\boldsymbol{a})$ differenzierbar, so ist $g \circ f$ in $\boldsymbol{a}$ differenzierbar und es gilt

$$\left(g \circ f\right)'(\boldsymbol{a}) = g'\left(f(\boldsymbol{a})\right) \bullet f'(\boldsymbol{a}).$$

   - $\bullet$ steht für die Komposition von linearen Abbildungen.

2. Ist $h:U \to \mathbf{F}$ eine weitere Abbildung, die in $\boldsymbol{a} \in U$ differenzierbar ist, so gilt

$$\left(h + f\right)'(\boldsymbol{a}) = h'(\boldsymbol{a}) + f'(\boldsymbol{a})$$

3. Ist $k \in \mathbb{K}$ und ist f in $\boldsymbol{a}$ differenzierbar, so ist $k \cdot f$ in $\boldsymbol{a}$ differenzierbar und es gilt

$$\left(k \cdot f\right)'(\boldsymbol{a}) = k \cdot f'(\boldsymbol{a})$$

4. Ist $j:U \to \mathbf{E}$ definiert durch $j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, so ist j in $\boldsymbol{a}$ differenzierbar und es gilt $j'(\boldsymbol{a}) = 1_{\mathbf{E}}$.

5. Ist $\lambda \in \mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$, so ist λ in $\boldsymbol{a}$ differenzierbar und es gilt $\lambda'(\boldsymbol{a}) = \lambda$.

6. Ist $\mathbf{E} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i$ und $\Phi \in \mathscr{L}(\mathbf{E}_1,\ldots,\mathbf{E}_n;\mathbf{F})$, so ist Φ in $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n) \in U$ differenzierbar. Es gilt

$$\Phi'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \Phi\left(\boldsymbol{a} + \iota_i^{\mathbf{E}} \pi_i^{\mathbf{E}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\right) = \sum_{i=1}^{n} \Phi\left(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{i-1},\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{a}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{a}_n\right),$$

   wobei $\iota_i^{\mathbf{E}}:\mathbf{E}_i \to \mathbf{E}$ die kanonischen Injektionen und $\pi_i^{\mathbf{E}}:\mathbf{E} \to \mathbf{E}_i$ die kanonischen Projektionen sind (0.2.19).

7. Es sei nun $f: U \to V$ ein Homöomorphismus und f in $\boldsymbol{a} \in U$ differenzierbar. Ist dann $f'(\boldsymbol{a}) \in \mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ ein Isomorphismus, so ist f^{-1} in $f(\boldsymbol{a})$ differenzierbar und $\left(f^{-1}\right)'(f(\boldsymbol{a}))$ ist die zu $f'(\boldsymbol{a})$ inverse Abbildung. Es gilt folglich

$$\left(f^{-1}\right)'(f(\boldsymbol{a})) = \left(f'(\boldsymbol{a})\right)^{-1}.$$

8. Es sei $\mathbf{F} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$ und $U \subseteq \mathbf{E}$ offen. Es sei $f: U \to \mathbf{F}$ eine Abbildung. Es seien $\iota_i^{\mathbf{F}}: \mathbf{F}_i \to \mathbf{F}$ die kanonischen Injektionen und $\pi_i^{\mathbf{F}}: \mathbf{F} \to \mathbf{F}_i$ die kanonischen Projektionen. Diese sind nach 0.2.9 stetig. Mit $f_i = \pi_i^{\mathbf{F}} \circ f$ folgt

$$f = \left(\sum_{i=1}^{n} \iota_i^{\mathbf{F}} \circ \pi_i^{\mathbf{F}}\right) \circ f = \sum_{i=1}^{n} \left(\iota_i^{\mathbf{F}} \circ \pi_i^{\mathbf{F}}\right) \circ f = \sum_{i=1}^{n} \iota_i^{\mathbf{F}} \circ \left(\pi_i^{\mathbf{F}} \circ f\right) = \sum_{i=1}^{n} \iota_i^{\mathbf{F}} \circ f_i .$$

Ist f in $\boldsymbol{a} \in U$ (stetig) differenzierbar, so sind auch alle f_i in $\boldsymbol{a} \in U$ (stetig) differenzierbar und umgekehrt. Es gilt

$$f'(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \iota_i^{\mathbf{F}} \circ f_i'(\boldsymbol{a}) \qquad \text{oder als Matrix} \qquad f'(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} f_1'(\boldsymbol{a}) & \cdots & f_n'(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

9. Es sei $\mathbf{F} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$ der Produktraum von Banachräumen. Es sei $\Phi: \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ n-linear. Es sei $U \subseteq \mathbf{E}$ offen. Es sei $g: U \to \mathbf{F}$ eine in $\boldsymbol{a} \in U$ differenzierbare Abbildung.

Durch $\vartheta = \Phi \circ g$ ist eine Abbildung $\vartheta: U \to \mathbf{G}$ definiert, die in $\boldsymbol{a} \in U$ differenzierbar ist. Es gilt

$$\vartheta'(\boldsymbol{a}) = \Phi'\left(g(\boldsymbol{a})\right) \bullet g'(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \Phi\left(g(\boldsymbol{a}) + \iota_i^{\mathbf{E}} \pi_i^{\mathbf{E}}\left(g'(\boldsymbol{a}) - g(\boldsymbol{a})\right)\right).$$

In der Produktschreibweise erhalten wir

$$\left(\vartheta'(\boldsymbol{a})\right)\mathbf{e} = \Phi'\left(g(\boldsymbol{a})\right) \bullet g'(\boldsymbol{a})\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{n} \Phi\left(g(\boldsymbol{a}) + \iota_i^{\mathbf{E}} \pi_i^{\mathbf{E}}\left(g'(\boldsymbol{a})\mathbf{e} - g(\boldsymbol{a})\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \Phi\big(g_1(\boldsymbol{a}), \ldots, \underbrace{g_i'(\boldsymbol{a})\mathbf{e}}_{i-\text{te Stelle}}, \ldots, g_n(\boldsymbol{a})\big).$$

10. Sind insbesondere $\Phi: U \to \mathscr{L}\left(\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n; \mathbf{F}\right)$ und $g: U \to \mathbf{F}$ in $\boldsymbol{a} \in U \subseteq \mathbf{E}$ differenzierbar und $\eta\left(\Phi(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})\right) := \Phi(\boldsymbol{x})\left(g(\boldsymbol{x})\right)$, also η $(n+1)$-linear, dann ist $\vartheta: U \to \mathbf{G}$ definiert durch $\vartheta(\boldsymbol{x}) := \eta\left(\Phi(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})\right)$ in $\boldsymbol{a} \in U$ differenzierbar. Es gilt

$$\vartheta'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e} = \Phi'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e}\left(g(\boldsymbol{a})\right) + \sum_{i=1}^{n} \Phi(\boldsymbol{a})\left(g_1(\boldsymbol{a}), \ldots, g_i'(\boldsymbol{a})e, \ldots, g_n(\boldsymbol{a})\right).$$

Definition 0.3.7

Es seien $\mathbf{E} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i$, $U \subseteq \mathbf{E}$ offen. Es sei $f: U \to \mathbf{F}$ eine Abbildung. Für $\boldsymbol{a} \in U$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}$ seien $\left(\kappa_i^{\boldsymbol{a}} \circ \pi_i^{\mathbf{E}}\right)(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{a} + \iota_i^{\mathbf{E}}\left(\pi_i^{\mathbf{E}}\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\right)\right)$, $1 \le i \le n$. Ferner seien die ***PARTIELLEN ABBILDUNGEN*** $f \circ \kappa_i^{\boldsymbol{a}}: \pi_i^{\mathbf{E}}(U) \to \mathbf{F}$ durch $\left(f \circ \kappa_i^{\boldsymbol{a}}\right)\left(\pi_i^{\mathbf{E}}(\boldsymbol{x})\right) := f\left(\boldsymbol{a} + \iota_i^{\mathbf{E}}\left(\pi_i^{\mathbf{E}}\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\right)\right)\right)$ für jedes $1 \le i \le n$ definiert.

Nun gilt: $\kappa_i^{\boldsymbol{a}}$ ist in $\pi_i^{\mathbf{E}}(\boldsymbol{x})$ differenzierbar, also $\left(\kappa_i^{\boldsymbol{a}}\right)'\left(\pi_i^{\mathbf{E}}(\boldsymbol{x})\right)=\left(\iota_i^{\mathbf{E}}\right)'\left(\pi_i^{\mathbf{E}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right)=\iota_i^{\mathbf{E}}$. Ist f in $\boldsymbol{a}\in U$ differenzierbar, so sind alle $f\circ\kappa_i^{\boldsymbol{a}}$ in $\pi_i^{\mathbf{E}}(\boldsymbol{a})\in\pi_i^{\mathbf{E}}(U)$, $1\le i\le n$ differenzierbar und es gilt:

$$\left(f\circ\kappa_i^{\boldsymbol{a}}\right)'\left(\pi_i^{\mathbf{E}}(\boldsymbol{a})\right)=f'(\boldsymbol{a})\bullet\iota_i^{\mathbf{E}}.$$

Die Ableitungen der partiellen Abbildungen heißen ***PARTIELLE ABLEITUNGEN***. Wir bezeichnen sie mit

$$D_i f=\left(f\circ\kappa_i^{\boldsymbol{a}}\right)'\circ\pi_i^{\mathbf{E}}.$$

Definieren wir die stetige lineare Abbildung $\left(\iota_i^{\mathbf{E}}\right)^*:\mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})\to\mathscr{L}(\mathbf{E}_i,\mathbf{F})$ durch $\left(\iota_i^{\mathbf{E}}\right)^*(\gamma)=\gamma\bullet\iota_i^{\mathbf{E}}$, so gilt $D_i f=\left(\iota_i^{\mathbf{E}}\right)^* f'$. Insbesondere ist $f'=\sum_{i=1}^{n}\left(\pi_i^{\mathbf{E}}\right)^* D_i f$.

Zeigen Sie: Ist f differenzierbar in $\boldsymbol{a}$ so gilt

$$D_i f(\boldsymbol{a}):=\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

Wird $\boldsymbol{e}_i$ durch einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{v}$ ersetzt, so sprechen wir von der ***RICHTUNGSABLEITUNG VON f IN RICHTUNG $\boldsymbol{v}$***.

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}):=\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{a})}{t}$$

Existieren alle partiellen Ableitungen $D_i f$ in $\boldsymbol{a}\in U$ und sind $n-1$ der $D_i f$ stetig in U, so ist f in $\boldsymbol{a}\in U$ differenzierbar.

Die Abbildung f ist genau dann in U stetig differenzierbar, wenn alle $D_i f:U\to\mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ stetig sind.

Auch hier kann die Matrixschreibweise hilfreich sein. In endlichdimensionalen Räumen wird transponiert.

$$f'(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}D_1 f(\boldsymbol{a}) & \cdots & D_n f(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}$$

Korollar 0.3.8

Es seien $\mathbf{E}=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{E}_i$, $\mathbf{F}=\prod_{i=1}^{m}\mathbf{F}_i$, $U\subseteq\mathbf{E}$ offen. Es sei $f:U\to\mathbf{F}$ eine in $\boldsymbol{a}\in U$ differenzierbare Abbildung. Ferner seien $\pi_i^{\mathbf{E}}:\mathbf{E}\to\mathbf{E}_i$ die kanonischen Projektionen und $\iota_i^{\mathbf{F}}:\mathbf{F}_i\to\mathbf{F}$ die kanonischen Injektionen.

Dann gilt mit $f'=\sum_{j=1}^{m}\iota_j^{\mathbf{F}}\circ f_j'$ (0.3.6 8.) und $f_j'=\sum_{i=1}^{n}\left(\pi_i^{\mathbf{E}}\right)^* D_i f_j'$ (0.3.7) die Gleichung

$$f'=\sum_{j=1}^{m}\iota_j^{\mathbf{F}}\circ f_j'=\sum_{j=1}^{m}\iota_j^{\mathbf{F}}\circ\sum_{i=1}^{n}\left(\pi_i^{\mathbf{E}}\right)^* D_i f_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\iota_j^{\mathbf{F}}\circ\left(\pi_i^{\mathbf{E}}\right)^* D_i f_j$$

oder

$$f'(\boldsymbol{a})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\iota_j^{\mathbf{F}}\bullet D_i f_j(\boldsymbol{a})\bullet\pi_i^{\mathbf{E}}.$$

In Matrixschreibweise lautet es

$$f'(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix} D_1 f_1(\boldsymbol{a}) & \cdots & D_n f_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\boldsymbol{a}) & \cdots & D_n f_m(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

Ist $g:V\to\mathbf{G}$ eine weitere in $f(\boldsymbol{a})\in V$ differenzierbare Abbildung und $\mathbf{G}=\prod_{k=1}^{p}\mathbf{G}_k$, so gilt nach der Kettenregel (0.3.6 1.)

$$D_i(g\circ f)_k(\boldsymbol{a})=\sum_{j=1}^{m} D_j g_k(f(\boldsymbol{a}))\bullet D_i f_j(\boldsymbol{a})$$

Als Matrixmerkregel

$$(g\circ f)'(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix} D_1 g_1(f(\boldsymbol{a})) & \cdots & D_n g_1(f(\boldsymbol{a})) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 g_p(f(\boldsymbol{a})) & \cdots & D_n g_p(f(\boldsymbol{a})) \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} D_1 f_1(\boldsymbol{a}) & \cdots & D_n f_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\boldsymbol{a}) & \cdots & D_n f_m(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

Dies folgt aus den Darstellungen $\pi_i\circ\iota_j=\delta^i_j\cdot\mathbb{1}_{\mathbf{E}_j}$, $f'(\boldsymbol{a})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\iota^{\mathbf{F}}_j\bullet D_i f_j(\boldsymbol{a})\bullet\pi^{\mathbf{E}}_i$ und $g'(f(\boldsymbol{a}))=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}\iota^{\mathbf{G}}_k\bullet D_j g_k(f(\boldsymbol{a}))\bullet\pi^{\mathbf{F}}_j$.

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(\boldsymbol{a})&=g'(f(\boldsymbol{a}))\bullet f'(\boldsymbol{a})\\ &=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}\iota^{\mathbf{G}}_k\bullet D_j g_k(f(\boldsymbol{a}))\bullet\pi^{\mathbf{F}}_j\bullet\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\iota^{\mathbf{F}}_j\bullet D_i f_j(\boldsymbol{a})\bullet\pi^{\mathbf{E}}_i\\ &=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\iota^{\mathbf{G}}_k\bullet D_j g_k(f(\boldsymbol{a}))\bullet D_i f_j(\boldsymbol{a})\bullet\pi^{\mathbf{E}}_i\\ &=\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\iota^{\mathbf{G}}_k\bullet D_j g_k(f(\boldsymbol{a}))\bullet D_i f_j(\boldsymbol{a})\bullet\pi^{\mathbf{E}}_i\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$(g\circ f)'(\boldsymbol{a})=\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}\iota^{\mathbf{G}}_k\bullet D_i(g\circ f)_k(\boldsymbol{a})\bullet\pi^{\mathbf{E}}_i.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Definition 0.3.9

Es seien $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ Banachräume sowie $U \subseteq \mathbf{E}$ offen. Es sei $f: U \to \mathbf{F}$ in U differenzierbar. f heißt genau dann ***ZWEIMAL DIFFERENZIERBAR IN*** $\boldsymbol{a} \in U$, wenn $f': U \to \mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ in $\boldsymbol{a} \in U$ differenzierbar ist. Statt $(f')'(\boldsymbol{a})$ schreiben wir $f''(\boldsymbol{a})$. Ferner ist

$$f''(\boldsymbol{a}) \in \mathscr{L}(\mathbf{E}, \mathscr{L}(\mathbf{E}; \mathbf{F})) \cong \mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{E}; \mathbf{F})$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$\mathscr{L}_2(\mathbf{E}; \mathbf{F}) := \mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{E}; \mathbf{F}).$$

Theorem 0.3.10

Es seien $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ Banachräume sowie $U \subseteq \mathbf{E}$ offen. Es sei $f: U \to \mathbf{F}$ eine Abbildung, die in $\boldsymbol{a} \in U$ zweimal differenzierbar ist.

Dann ist $f''(\boldsymbol{a})$ eine ***BILINEARE SYMMETRISCHE ABBILDUNG***.

$$f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) = f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s})$$

Einen Beweis findet man in H. Cartan, Differentialrechnung, Seite 86.

Es seien $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ Banachräume sowie $U \subseteq \mathbf{E}$ offen. Es sei $f: U \to \mathbf{F}$ eine Abbildung, es seien für alle $0 \le i \le r-2$ $f^{(i)}: U \to \mathscr{L}_i(\mathbf{E},\mathbf{F})$ in $\boldsymbol{a} \in U$ differenzierbar.

f heißt genau dann ***r-MAL DIFFERENZIERBAR IN*** $\boldsymbol{a} \in U$, wenn $f^{(r-1)}: U \to \mathscr{L}_{r-1}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ in $\boldsymbol{a} \in U$ differenzierbar ist. $f^{(r)}(\boldsymbol{a})$ ist folglich eine ***r-LINEARE SYMMETRISCHE ABBILDUNG***!

0.4 Lokales Umkehr-, implizites Funktionen- und Rangtheorem

Erinnern wir zuvor einige Definitionen.

f heißt **Homöomorphismus**, wenn f stetig und bijektiv sowie f^{-1} stetig ist. Die Abbildung $f: U \to \mathbf{F}$ heißt genau dann **stetig differenzierbar in** U oder **aus der Klasse** C^1, wenn

a) f in U differenzierbar,

b) $f': U \to \mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ stetig ist.

Definition 0.4.1

Es seien $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ Banachräume. Es seien $U \subseteq \mathbf{E}$, $V \subseteq \mathbf{F}$ offen und $f: U \to \mathbf{F}$ eine Abbildung.

Die Abbildung f heißt genau dann ein C^1**-Diffeomorphismus**, wenn $f: U \to V$ ein Homöomorphismus ist und $f \in \mathscr{C}^1(U,V)$ sowie $f^{-1} \in \mathscr{C}^1(V,U)$. Für diese Klasse schreiben wir $f \in \mathscr{D}^1(U,V)$.

Die Bedingung $f^{-1} \in \mathscr{C}^1(V,U)$ ist notwendig, denn $f(x) = x^3$ zeigt, dass darauf nicht verzichtet werden kann.

Satz 0.4.2

Es seien $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ Banachräume. Es seien $U \subseteq \mathbf{E}$, $V \subseteq \mathbf{F}$ offen. Es sei $f: U \to V$ ein Homöomorphismus mit $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$ und $f \in \mathscr{C}^1(U,V)$.

f ist genau dann ein C^1-Diffeomorphismus, wenn $f'(\boldsymbol{a}) \in \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ für jedes $\boldsymbol{a} \in U$.

Insbesondere gilt dann $\left(f^{-1}\right)'(f(\boldsymbol{a})) = \left(f'(\boldsymbol{a})\right)^{-1}$.

Satz 0.4.3

Ist f ein C^1-Diffeomorphismus und ist f aus der Klasse C^r, so ist f^{-1} ebenfalls aus der Klasse C^r.

Satz 0.4.4 (Lokaler Umkehrsatz)

Es seien $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ Banachräume. Es seien $U \subseteq \mathbf{E}$ offen und $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbf{F})$. Für $\boldsymbol{a} \in U$ sei $f'(\boldsymbol{a}) \in \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E},\mathbf{F})$.

Dann existiert eine offene Umgebung V von $\boldsymbol{a}$ mit $V \subseteq U$ und eine offene Umgebung W von $f(\boldsymbol{a})$, so dass $f \in \mathscr{D}^1(U,V)$.

Bezeichnung 0.4.5

Aufgrund des lokalen Umkehrsatzes sprechen wir auch von lokalen C^1-Diffeomorphismen.

Korollar 0.4.6

Es seien $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$ Banachräume. Es sei $U \subseteq \mathbf{E}$ offen und $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbf{F})$. Für $\boldsymbol{a} \in U$ sei $f(\boldsymbol{a}) = (\mathbf{0},\mathbf{0})$ und $f'(\boldsymbol{a}) \in \mathrm{Iso}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E},\mathbf{F}_1 \times \{0\})$. Dann existiert ein $g \in \mathscr{D}^1(V_1 \times V_2, V_1 \times V_2)$, wobei $(\mathbf{0},\mathbf{0}) \in V_1 \times V_2$, so dass $g \circ f: U' \to \mathbf{F}_1 \times \{\mathbf{0}\}$, $U' \subseteq U$ offen, ein $h \in \mathscr{D}^1(U',W_1)$, $W_1 \subseteq \mathbf{F}_1$ offen mit $h(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{a} \in U'$, $\mathbf{0} \in W_1$ induziert.

Theorem 0.4.7 (*Satz von den impliziten Abbildungen*)

Es seien $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ und $\mathbf{G}$ Banachräume sowie $U \subseteq \mathbf{E} \times \mathbf{F}$ offen und $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbf{G})$. Es sei $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in U$ mit $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbf{0}$, $D_2 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathrm{Iso}_{\mathrm{K}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$. Dann existiert eine offene Umgebung $V \subseteq U$ mit $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in V$ und eine offene Umgebung $W \subseteq \mathbf{E}$ mit $\boldsymbol{a} \in W$ sowie ein $g \in \mathscr{C}^1(W, \mathbf{F})$, so dass gilt

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in V \text{ und } f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in W \text{ und } g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} .$$

Insbesondere gilt $g'(\boldsymbol{a}) = -\left(D_2 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\right)^{-1} \bullet D_1 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Korollar 0.4.8 (*Rangtheorem*)

Die Voraussetzungen seien wie in 0.4.7. Dann existiert ein lokaler C^1-Diffeomorphismus $h : V_1 \times V_2 \to U' \subseteq U$ mit $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in U'$, so dass $(f \circ h)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}$. Mit anderen Worten $f \circ h$ ist die Projektion auf die zweite Koordinate.

Bemerkung 0.4.9

Für endlichdimensionale Räume zeigt das Rangtheorem, dass nach Permutierung der Koordinaten die Abbildung $f \circ h$ eine Projektion bzw. $(f \circ h)^{-1}$ eine Injektion darstellt. Mit anderen Worten: Der Rang der Funktionalmatrix ist gleich der Dimension von $\mathbf{G}$.

0.5 Richtungsableitung und Differenzierbarkeit

Statt der partiellen Ableitungen, können allgemeinere Ableitungen definiert werden.

Definition 0.5.1
Es seien $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ zwei Banachräume. Es sei $U \subseteq \mathbf{E}$ eine offene Menge. Es sei $f : U \to \mathbf{F}$ eine Abbildung und $\boldsymbol{e} \in \mathbf{E}$ ein Vektor. Der Grenzwert

$$D_{\boldsymbol{e}} f(\boldsymbol{a}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}) - f(\boldsymbol{a})}{t}$$

heißt ***Richtungsableitung von*** f ***an der Stelle*** $\boldsymbol{a} \in U$ ***in Richtung des Vektors*** $\boldsymbol{e}$.

Es ist folglich $\frac{\partial f}{\partial x^i} = D_i f = D_{\boldsymbol{e}_i} f$ die partielle Ableitung.

Wir wissen schon, dass die Existenz der Richtungsableitungen nicht die Differenzierbarkeit impliziert. Es sollte daher ein Kriterium gefunden werden, wann auf die Differenzierbarkeit geschlossen werden kann. Dazu definieren wir zuerst die Schwache Ableitung. Andere Bezeichnungen hierfür sind Gateaux-Ableitung oder Strikte Ableitung.

Definition 0.5.2
Eine Abbildung $f : U \to \mathbf{F}$, wobei $U \subseteq \mathbf{E}$ offen und $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ zwei Banachräume sind, heißt ***schwach differenzierbar an der Stelle*** $\boldsymbol{a} \in U$, wenn die Abbildung

$$\boldsymbol{e} \in \mathbf{E} \mapsto (D_{\boldsymbol{e}} f)(\boldsymbol{a}) \in \mathbf{F}$$

linear und stetig auf $\mathbf{E}$ ist. Diese Abbildung bezeichnen wir mit $Df(\boldsymbol{a})$. Es gilt folglich

$$Df(\boldsymbol{a}) \in \mathscr{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \text{ mit } (Df(\boldsymbol{a}))(\boldsymbol{e}) = D_{\boldsymbol{e}} f(\boldsymbol{a}).$$

Folgerung 0.5.3
Ist $f : U \to \mathbf{F}$ differenzierbar an der Stelle $\boldsymbol{a} \in U$, so auch schwach differenzierbar.

Beweis:
Wir setzen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}t$ und erhalten mit $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + r(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ nach Definition 0.3.1 die Gleichung $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}t) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{e}t) + r(\boldsymbol{e}t)$, also

$$(Df(\boldsymbol{a}))(\boldsymbol{e}) = D_{\boldsymbol{e}} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}t) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{e}t) + r(\boldsymbol{e}t)}{t} = f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{e}) + \lim_{t \to 0} \frac{r(\boldsymbol{e}t)}{t}.$$

Aus $\left\| \frac{r(\boldsymbol{e}t)}{t} \right\| = \left\| \frac{r(\boldsymbol{e}t)}{\boldsymbol{e}t} \right\| \cdot \|\boldsymbol{e}\| \underset{t \to 0}{\to} 0$ folgt $(f'(\boldsymbol{a}))(\boldsymbol{e}) = (Df(\boldsymbol{a}))(\boldsymbol{e})$, also $f'(\boldsymbol{a}) = Df(\boldsymbol{a})$ für ein beliebiges $\boldsymbol{e}$.

0.6 Differentialformen in Banachräumen

DEFINITION 0.6.1

Es seien $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ zwei Banachräume. Eine p-lineare Abbildung $\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{L}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$, $p \geq 2$ heißt **ALTERNIEREND**, wenn

$$\bigvee_{1<i<p} \bigvee_{1<j<p} \bigwedge_{\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j \in \mathbf{E}} \left(\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}\left(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_i,\ldots,\mathbf{e}_j,\ldots,\mathbf{e}_p\right) = \mathbf{0}\right).$$

In Worten: Stimmen zwei der Vektoren in der $\mathbf{F}$-wertigen p-Linearform überein, so ist der zugeordnete Vektor stets null. Aus einer p-lineare Abbildung $\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{L}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$ kann durch Antisymmetrisierung eine alternierende p-lineare Abbildung erstellt werden, die für $\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$ wie die Identität wirkt. ***Konstruieren Sie diese! Beginnen Sie mit*** $p = 2,3,4,\ldots$

Die Menge der $\mathbf{F}$-wertigen alternierenden p-Linearformen werden mit $\mathscr{A}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$, $p \geq 2$ bezeichnet. Wir setzen noch $\mathscr{A}_0(\mathbf{E};\mathbf{F}) := \mathbf{F}$ und $\mathscr{A}_1(\mathbf{E};\mathbf{F}) := \mathscr{L}(\mathbf{E};\mathbf{F})$, um Fallunterscheidungen zu vermeiden. Insbesondere ist $\mathscr{A}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$ ein Teilvektorraum von $\mathscr{L}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$.

Es sei nun $U \subseteq \mathbf{E}$ offen. Eine Abbildung $\boldsymbol{\omega}: U \to \mathscr{A}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$ heißt eine **$\mathbf{F}$-WERTIGE p-DIFFERENTIALFORM**

der Klasse C^1, wenn $\boldsymbol{\omega}$ in U differenzierbar und stetig ist. Mithin sprechen wir kurz von einer vektorwertigen Differentialform. Den zugehörigen **VEKTORRAUM DER $\mathbf{F}$-WERTIGEN p-DIFFERENTIALFORMEN DER KLASSE** C^r, $r \geq 1$, bezeichnen wir mit $\boldsymbol{\Omega}_p^r(U;\mathbf{F})$. Wir setzen noch für den **GRAD** $\deg(\boldsymbol{\omega}) := p$.

DEFINITION 0.6.2

Es sei nun $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{L}(\mathbf{F},\mathbf{G};\mathbf{H})$ eine Bilinearform mit Werten im Banachraum $\mathbf{H}$. Es sei $U \subseteq \mathbf{E}$ offen. Das **ÄUßERE PRODUKT VON** $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Omega}_p^r(U;\mathbf{F})$ **UND** $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{\Omega}_q^r(U;\mathbf{G})$ **BEZÜGLICH** $\boldsymbol{\Phi}: \mathbf{F} \times \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ ist die $\mathbf{H}$-wertige $(p+q)$-Differentialform $\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{\Omega}_{p+q}^r(U;\mathbf{H})$ definiert durch

$$\left((\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{x})\right)\left(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{p+q}\right) := \sum_{\substack{\sigma \in S_{p+q} \\ \sigma(1)<\cdots<\sigma(p) \\ \sigma(p+1)<\cdots<\sigma(p+q)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(p)}\right), \boldsymbol{\beta}(x)\left(\mathbf{e}_{\sigma(p+1)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(p+q)}\right)\right)$$

Da $(\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{x})$ offensichtlich eine p-lineare $\mathbf{H}$-wertige Form der Klasse C^r ist, bleibt zu verifizieren, dass $(\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{x})$ auch alternierend ist. Dazu sei $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j$, $i < j$ und $\tau \in S_{p+q}$ die Transposition mit $\tau(i) = j$ und $\tau(k) = k$ für alle $k \in \{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,j-1,j+1,\ldots p+q\}$. Es ist $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$. Ist $\sigma(1) < \sigma(i) < \sigma(j) < \sigma(p)$ oder $\sigma(p+1) < \sigma(i) < \sigma(j) < \sigma(p+q)$, so ist nach Voraussetzung nichts zu zeigen. Sei daher nach einer Permutation und Umbenennung ohne Einschränkung $j = i+1$ sowie $\sigma(1) < \sigma(i) < \sigma(p)$ und $\sigma(p+1) < \sigma(i+1) < \sigma(p+q)$, dann gilt für jedes dieser σ:

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\, \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(p)}\right), \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\sigma(p+1)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(p+q)}\right)\right) + \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\, \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\sigma\tau(1)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma\tau(p)}\right), \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\sigma\tau(p+1)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma\tau(p+q)}\right)\right) = \mathbf{0}$$

und folglich für $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i+1}$ die Differentialform $\left((\alpha \underset{\Phi}{\wedge} \beta)(x)\right)\left(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{p+q}\right) = \mathbf{0}$ damit alternierend.

Definition 1.3

Wir definieren nun für $\alpha \in \Omega_p^r(U;\mathbf{F})$ eine Differentialform $d\alpha \in \Omega_{p+1}^{r-1}(U;\mathbf{F})$, ***Differential*** genannt.

$$d\alpha(x)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\mathbf{e}_p\right) := \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\left(\alpha'(x)(\mathbf{e}_i)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\mathbf{e}_p\right)$$

oder äquivalent dazu

$$d\alpha(x)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\mathbf{e}_p\right) := \sum_{\substack{\gamma\in S_{p+1} \\ \gamma(1)<\cdots<\gamma(p)}} \operatorname{sgn}(\gamma)\left(\alpha'(x)\left(\mathbf{e}_{\gamma(0)}\right)\right)\left(\mathbf{e}_{\gamma(1)},\ldots,\mathbf{e}_{\gamma(p)}\right).$$

Verifizieren Sie wie oben, dass $d\alpha(x)$ wirklich alternierend ist.

Korollar 0.6.4

Für $\alpha \in \Omega_p^r(U;\mathbf{F})$, $r \geq 2$ ist $d\left(d\alpha\right) = \mathbf{0}$.

Beweis

Nach Definition ist $d\left(d\alpha\right)(x)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right) = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\left(\left(d\alpha\right)'(x)(\mathbf{e}_i)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)$ mit

$$\begin{aligned}\left(\left(d\alpha\right)'(x)(\mathbf{e}_i)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right) &= \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^i\left(\alpha''(x)\left(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\right)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_j,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right) \\ &\quad -\sum_{j=i+1}^{p+1}(-1)^i\left(\alpha''(x)\left(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\right)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_j,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}&(-1)^i\left(\left(d\alpha\right)'(x)(\mathbf{e}_i)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)+(-1)^j\left(\left(d\alpha\right)'(x)\left(\mathbf{e}_j\right)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_j,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right) \\ &=\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}\left(\alpha''(x)\left(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\right)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_j,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)+\sum_{j=i+1}^{p+1}(-1)^{i+j+1}\left(\alpha''(x)\left(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\right)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_j,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right) \\ &+\sum_{i=j+1}^{p+1}(-1)^{i+j+1}\left(\alpha''(x)\left(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i\right)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_j,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)+\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^{i+j}\left(\alpha''(x)\left(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i\right)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_j,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)\end{aligned}$$

Zu jedem $0 \leq j \leq i-1$ finden wir genau ein $j+1 \leq i \leq p+1$ mit $\alpha''(x)\left(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\right)-\alpha''(x)\left(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i\right)=\mathbf{0}$.

Lemma 0.6.5

Es seien $\mathbf{F} = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i$ der Produktraum von Banachräumen $\left(\mathbf{F}_i\right)_{1\leq i\leq n}$ und $\Phi:\mathbf{F}\to\mathbf{G}$ n-linear. Es sei $g:U\to\mathbf{F}$ eine Abbildung, die in $x\in U$, $U\subseteq\mathbf{E}$ offen, differenzierbar ist. Durch $\omega := \Phi\circ g$ ist eine Abbildung $\omega:U\to\mathbf{G}$ definiert, die in $x\in U$ differenzierbar ist. Dann gilt

$$\omega'\left(x\right)\mathbf{e} = \Phi'\left(g(x)\right)\bullet g'(x)\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{n}\Phi\left(g_1(x),\ldots,g_i'(x)\mathbf{e},\ldots g_n(x)\right). \qquad (\mathbf{L1})$$

Ist sogar $\boldsymbol{\Phi}: U \to \mathscr{L}(\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n; \mathbf{G})$ von der Klasse C^1, so gilt darüber hinaus

$$\boldsymbol{\omega}'(\boldsymbol{x})\mathbf{e} = (\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x})\mathbf{e})(g(\boldsymbol{x})) + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})(g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_i'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}, \ldots, g_n(\boldsymbol{x})). \qquad (\boldsymbol{L2})$$

Im Folgenden lassen wir die Stelle $\boldsymbol{x}$ der Einfachheit halber weg.

Satz 0.6.6

Mit Definition 1.2 und Lemma 1.5 (***L1***) gilt mit $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Omega}_p^r(U; \mathbf{F})$ und $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{\Omega}_q^r(U; \mathbf{G})$ sowie $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{L}(\mathbf{F}, \mathbf{G}; \mathbf{H})$ die Gleichung

$$d(\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta}) = d\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta} + (-1)^{\deg(\alpha)} \boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} d\boldsymbol{\beta}.$$

Beweis

Es ist nach Lemma 1.5 (***L1***)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta})' \bullet \mathbf{e} &= \boldsymbol{\alpha}' \bullet \mathbf{e} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta}' \bullet \mathbf{e} \\ &= \boldsymbol{\alpha}' \bullet \mathbf{e} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta} + (-1)^{\deg(\alpha)\cdot\deg(\beta)} \boldsymbol{\beta}' \bullet \mathbf{e} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}\end{aligned}$$

Mit Definition 1.3 folgt

$$\begin{aligned}d(\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta}) &= d\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta} + (-1)^{\deg(\alpha)\cdot\deg(\beta)} d\boldsymbol{\beta} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha} \\ &= d\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta} + (-1)^{\deg(\alpha)\cdot\deg(\beta) + \deg(\alpha)\cdot(\deg(\beta)+1)} \boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} d\boldsymbol{\beta} \\ &= d\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta} + (-1)^{\deg(\alpha)} \boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} d\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.

Korollar 0.6.7

Es sei nun $\boldsymbol{\Phi}: U \to \mathscr{L}(\mathbf{F}, \mathbf{G}; \mathbf{H})$ von der Klasse C^1. Dann gilt nach Lemma 1.4 (***L2***)

$$\boldsymbol{\omega}'(\boldsymbol{x})\mathbf{e} = (\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x})\mathbf{e})(g(\boldsymbol{x})) + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})(g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_i'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}, \ldots, g_n(\boldsymbol{x})).$$

Folglich ist dann $(\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta})' \bullet \mathbf{e} = \boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}' \bullet \mathbf{e}}{\wedge} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}' \bullet \mathbf{e} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta}' \bullet \mathbf{e}$ zu verwenden. Damit korrigiert sich im Satz 1.6 zusätzlich

$$\sum_{\substack{\chi \in S_{p+q+1} \\ \chi(1) < \cdots \chi(p+q)}} \operatorname{sgn} \chi \left(\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}' \bullet \mathbf{e}_{\chi(0)}}{\wedge} \boldsymbol{\beta} \right) (e_{\chi(1)}, \ldots, e_{\chi(p+q)}).$$

Beachten wir noch, dass $d\boldsymbol{\Phi}$ eine 1-Differenialform mit Werten in $\mathscr{L}(\mathbf{F}, \mathbf{G}; \mathbf{H})$ ist, so folgt

$$d(\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta}) = d\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta} + (-1)^{\operatorname{grad}(\alpha)} \boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} d\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} \underset{d\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta}.$$

DEFINITION 0.6.8

Es sei $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{L}(\mathbf{F}_1,\ldots,\mathbf{F}_k;\mathbf{G})$ eine stetige k-Linearform mit Werten im Banachraum $\mathbf{G}$. Es seien $\boldsymbol{\alpha}_i \in \boldsymbol{\Omega}^r_{p_i}(U;\mathbf{F}_i)$, $1 \le i \le k$ Differentialformen. Durch

$$((\boldsymbol{\alpha}_1 \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \cdots \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_k)(\boldsymbol{x}))\left(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{p_1+\cdots+p_k}\right) := \sum_{\sigma \in S_{p_1+\cdots p_k}} \operatorname{sgn}\sigma\, \boldsymbol{\Phi}\Big((\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{x}))\left(\mathbf{e}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(p_1)}\right),\ldots,(\boldsymbol{\alpha}_k(x))\left(\mathbf{e}_{\sigma(p_1+\cdots+p_{k-1}+1)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(p_1+\cdots+p_k)}\right)\Big)$$

wobei $\sigma(1) < \cdots < \sigma(p_1)$, $\ldots$, $\sigma(p_1+\cdots+p_{k-1}+1) < \cdots < \sigma(p_1+\cdots+p_k)$, wird eine $(p_1+\cdots+p_k)-$ Differentialform mit Werten in $\mathbf{G}$ definiert.

Sind $\mathbf{F}_i = \mathbf{K}$, $1 \le i \le k$ und ist $\mathbb{K}$ der Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen, so ist $\boldsymbol{\Phi}$ einfach das k-fache Produkt. In diesem Fall schreiben wir kurz

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\alpha}_k \,.$$

Der Beweis ist genauso zu führen wie in Definition 0.4.2.

Sind $\mathbf{F}_i = \mathbf{G}$, $1 \le i \le k$, so kann $\boldsymbol{\alpha}_1 \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \cdots \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_k$ wie folgt definiert werden. Hier für $k = 3$.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_2 \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_3)(\boldsymbol{x}) := ((\boldsymbol{\alpha}_1 \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_2)(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_3(\boldsymbol{x}))$$

Vermöge dieser Definition erhalten wir eine Algebra. Zeigen Sie dafür

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_2)(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_3(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} (\boldsymbol{\alpha}_2 \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_3)(\boldsymbol{x}) \,.$$

Für die sogenannten Differentiale defineren wir spezielle Differentialformen.

DEFINITION 0.6.9

Es sei $U \subseteq \mathbf{E}$ offen und $\boldsymbol{\omega}: U \to \mathscr{A}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$ eine $\mathbf{F}$-wertige p-Differentialform der Klasse C^1. Es sei $\mathbf{E} = \mathbf{G}_1 \times \cdots \times \mathbf{G}_k$ und $\iota_U : U \to \mathbf{E}$ die kanonische Einbettung. Für jedes $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le k$ sei $\boldsymbol{\pi}^i$ die kanonische Projektion, also $\boldsymbol{\pi}^i \circ \iota_U : U \to \mathbf{G}_i$ definiert durch $\boldsymbol{\pi}^i(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}_i$ mit $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k)$. Dann ist $d\boldsymbol{\pi}^i : U \to \mathscr{A}(\mathbf{G}_1 \times \cdots \times \mathbf{G}_k;\mathbf{G}_i)$ nichts anderes als $d\boldsymbol{\pi}^i(\boldsymbol{x})(\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_k) := \mathbf{g}_i$, denn $\left(\boldsymbol{\pi}^i \circ \iota_U\right)'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\pi}^i$.

Es sei nun $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{L}(\mathbf{G}_1,\cdots,\mathbf{G}_p;\mathbf{F})$ eine stetige nicht ausgeartete vektorwertige p-Linearform und $d\boldsymbol{\pi}^{j_1} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \ldots \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} d\boldsymbol{\pi}^{j_p} : U \to \mathscr{A}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$, wobei $\mathbf{E} = \mathbf{G}_1 \times \cdots \times \mathbf{G}_k$ ist, dann

$$d\boldsymbol{\pi}^{j_1} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \ldots \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} d\boldsymbol{\pi}^{j_p}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_p\right) := \sum_{\lambda \in S_p} \operatorname{sgn}(\lambda)\, \boldsymbol{\Phi}\Big(d\boldsymbol{\pi}^{j_1}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\lambda(1)}\right),\ldots,d\boldsymbol{\pi}^{j_p}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\lambda(p)}\right)\Big).$$

Dann gibt es eindeutig bestimmte $w_{j_1,\ldots,j_p} : U \to \mathbf{F}$ der Klasse C^r, $r \ge 1$, so dass

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{j_1 < \ldots < j_p} w_{j_1,\ldots,j_p} \bullet d\boldsymbol{\pi}^{j_1} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \ldots \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} d\boldsymbol{\pi}^{j_p} \,.$$

Diese Darstellung nennen wir kanonische Darstellung der $\mathbf{F}$-wertige p-Differentialform. Sind $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \cdots = \mathbf{E}_k = \mathbb{K}$ und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ der Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen, so ist $\boldsymbol{\Phi}$ das gewöhnliche Produkt von p Zahlen.

Diese Darstellung nennen wir die ***kanonische Darstellung*** der Differentialform.

Ist $\mathbf{E}$ k-dimensional, so darf jedes $\mathbf{E}_i \simeq \mathbb{K}$ angesehen werden. Dann ist $\boldsymbol{\Phi}$ das gewöhnliche Produkt und wir schreiben $dx^j := d\boldsymbol{\pi}^j$. Mit 0.6.6 ist nun

$$d\boldsymbol{\pi}^{j_1} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \ldots \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} d\boldsymbol{\pi}^{j_p}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\right) := \sum_{\lambda \in S_p} \operatorname{sgn}(\lambda) \boldsymbol{\Phi}\left(d\boldsymbol{\pi}^{j_1}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\lambda(1)}\right), \ldots, d\boldsymbol{\pi}^{j_p}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\lambda(p)}\right)\right),$$

also

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\right) &= \sum_{j_1 < \ldots < j_p} w_{j_1, \ldots, j_p}(\boldsymbol{x})\left(d\boldsymbol{\pi}^{j_1} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \ldots \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} d\boldsymbol{\pi}^{j_p}\right)\left(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\right) \\
&= \sum_{j_1 < \ldots < j_p} w_{j_1, \ldots, j_p}(\boldsymbol{x}) \sum_{\lambda \in S_p} \operatorname{sgn}(\lambda) \boldsymbol{\Phi}\left(d\boldsymbol{\pi}^{j_1}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\lambda(1)}\right), \ldots, d\boldsymbol{\pi}^{j_p}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\lambda(p)}\right)\right)
\end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{e}_i = \left(\mathbf{e}_{i,1}, \ldots, \mathbf{e}_{i,k}\right)$ setzen wir $\mathbf{e}_i^{j_l} := (0, \ldots, 0, \underset{j_l-\text{te Stelle}}{e_{i,j_l}}, 0, \ldots, 0)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_1^{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_p^{i_p}\right) &= \sum_{j_1 < \ldots < j_p} w_{j_1, \ldots, j_p}(\boldsymbol{x}) \sum_{\lambda \in S_p} \operatorname{sgn}(\lambda) \boldsymbol{\Phi}\left(d\boldsymbol{\pi}^{j_1}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\lambda(1)}^{i_{\lambda(1)}}\right), \ldots, d\boldsymbol{\pi}^{j_p}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\lambda(p)}^{i_{\lambda(p)}}\right)\right) \\
&= \sum_{j_1 < \ldots < j_p} w_{j_1, \ldots, j_p}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{e}_{1,j_1} \delta_i^j, \ldots, \mathbf{e}_{p,j_p} \delta_p^j\right) \\
&= w_{i_1, \ldots, i_p}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{e}_{1,i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{p,i_p}\right)
\end{aligned}$$

Definieren wir $w_{j_1, \ldots, j_p} : U \to \mathbf{F}$ durch

$$w_{j_1, \ldots, j_p}(\boldsymbol{x}) := \left(\boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{e}_{1,j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{p,j_p}\right)\right)^{-1} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{1,j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{p,j_p}\right),$$

so ist alles gezeigt.

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit Abbildungen zwischen Banachräumen.

DEFINITION 0.6.10

Es seien $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ Banachräume. Es sei $U \subseteq \mathbf{E}$ offen und $f : U \to V \subseteq \mathbf{F}$ eine Abbildung der Klasse C^{r+1}. Für eine Differentialform $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Omega}_p^r(V, \mathbf{G})$ mit Werten in $\mathbf{G}$ sei $f^*\boldsymbol{\alpha}$ definiert durch

$$\left(f^*\boldsymbol{\alpha}\right)(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p\right) := \boldsymbol{\alpha}(f(\boldsymbol{x}))\left(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_1, \ldots, f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\right).$$

Dann ist $f^*\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Omega}_p^r(U, \mathbf{G})$. $f^*\boldsymbol{\alpha}$ heißt ***PULL BACK*** von $\boldsymbol{\alpha}$ durch f. Es gilt

(i) $f^*(\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta}) = f^*\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} f^*\boldsymbol{\beta}$

(ii) $f^*(d\boldsymbol{\alpha}) = d\left(f^*\boldsymbol{\alpha}\right)$

(iii) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ für eine weitere Abbildung $g : W \to U$ der Klasse C^{r+1}, $W \subseteq \mathbf{H}$ offen im Banachraum $\mathbf{H}$.

BEWEIS

Wir haben zu zeigen, dass $f^*\boldsymbol{\alpha}$ von der Klasse C^r ist. Zunächst ist $f'(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{L}(\mathbf{E}; \mathbf{F})$ nach 0.3.3. Also sind $\boldsymbol{\alpha} \circ f : U \to \mathscr{A}_p(\mathbf{F}; \mathbf{G})$ und f' von der Klasse C^r.

Wir setzen in 1.5 (***L1***) für die Ableitung $g:U\to\mathbf{F}$ einfach $g:U\to\mathbf{F}^p$ mit $g(\boldsymbol{x}):=\big(g_1(\boldsymbol{x}),\dots,g_p(\boldsymbol{x})\big)$ und $g_i(\boldsymbol{x})=f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_i$. Folglich stimmt nun $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}):=\boldsymbol{\Phi}\big((\boldsymbol{\alpha}\circ f)(\boldsymbol{x}),\,g(\boldsymbol{x})\big)$ mit $\big(f^*\boldsymbol{\alpha}\big)(\boldsymbol{x})\big(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p\big):=\boldsymbol{\alpha}\big(f(\boldsymbol{x})\big)\big(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_1,\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\big)$ überein. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}&=\big(\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}\big)\big(g(\boldsymbol{x})\big)+\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\big(g_1(\boldsymbol{x}),\dots,g_i'(\boldsymbol{x})\mathbf{e},\dots,g_n(\boldsymbol{x})\big)\\
&=\boldsymbol{\alpha}'\big(f(\boldsymbol{x})\big)\bullet f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}\big(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_1,\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\big)+\sum_{i=1}^{p}\big(\boldsymbol{\alpha}\circ f\big)(\boldsymbol{x})\big(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_1,\dots,f''(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}),\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\big) \qquad (\#)\\
&=\boldsymbol{\alpha}'\big(f(\boldsymbol{x})\big)\bullet f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}\big(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_1,\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\big)+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}\boldsymbol{\alpha}\big(f(\boldsymbol{x})\big)\big(f''(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}),f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_1,\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\big)
\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.

Wir beweisen (i) $f^*(\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta})=f^*\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}f^*\boldsymbol{\beta}$.

$$\begin{aligned}
(f^*(\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta}))(\boldsymbol{x})\big(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{p+q}\big)&=((\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta})(f(\boldsymbol{x})))\big(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_1,\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_{p+q}\big)\\
&=\sum_{\substack{\sigma\in S_{p+q}\\ \sigma(1)<\dots<\sigma(p)\\ \sigma(p+1)<\dots<\sigma(p+q)}}\operatorname{sgn}\sigma\,\boldsymbol{\Phi}\Big(\boldsymbol{\alpha}\big(f(\boldsymbol{x})\big)\big(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_{\sigma(1)},\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_{\sigma(p)}\big),\boldsymbol{\beta}\big(f(\boldsymbol{x})\big)\big(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_{\sigma(p+1)},\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_{\sigma(p+q)}\big)\Big)\\
&=\sum_{\substack{\sigma\in S_{p+q}\\ \sigma(1)<\dots<\sigma(p)\\ \sigma(p+1)<\dots<\sigma(p+q)}}\operatorname{sgn}\sigma\,\boldsymbol{\Phi}\Big(f^*\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})\big(\mathbf{e}_{\sigma(1)},\dots,\mathbf{e}_{\sigma(p)}\big),f^*\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})\big(\mathbf{e}_{\sigma(p+1)},\dots,\mathbf{e}_{\sigma(p+q)}\big)\Big)\\
&=((f^*\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}f^*\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{x}))\big(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{p+q}\big)
\end{aligned}$$

Wir beweisen (ii) $f^*\big(d\boldsymbol{\alpha}\big)=d\big(f^*\boldsymbol{\alpha}\big)$.

Es ist

$$\begin{aligned}
d\big(f^*\boldsymbol{\alpha}\big)(\boldsymbol{x})\big(\mathbf{e}_0,\dots,\mathbf{e}_p\big)&=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\Big(\big(f^*\boldsymbol{\alpha}\big)'(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_i)\Big)\Big(\mathbf{e}_0,\dots,\widehat{\mathbf{e}_i},\dots,\mathbf{e}_p\Big)\\
&=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\big(\boldsymbol{\alpha}'\big(f(\boldsymbol{x})\big)\bullet f'(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_i)\big)\Big(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_0,\dots,\widehat{f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_i},\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\Big)\\
&\quad+\sum_{0\le k<i\le p}(-1)^i\boldsymbol{\alpha}\big(f(\boldsymbol{x})\big)\Big(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_0,\dots,\underbrace{f''(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k)}_{k-\text{te Stelle}},\dots,\widehat{f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_i},\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\Big)\\
&\quad+\sum_{0\le i<k\le p}(-1)^i\boldsymbol{\alpha}\big(f(\boldsymbol{x})\big)\Big(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_0,\dots,\widehat{f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_i},\dots,\underbrace{f''(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k)}_{k-\text{te Stelle}},\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\Big)\\
&=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\big(\boldsymbol{\alpha}'\big(f(\boldsymbol{x})\big)\bullet f'(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_i)\big)\Big(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_0,\dots,\widehat{f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_i},\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\Big)\\
&=d\boldsymbol{\alpha}\big(f(\boldsymbol{x})\big)\big(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_0,\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\big)\\
&=\big(f^*d\boldsymbol{\alpha}\big)(\boldsymbol{x})\big(\mathbf{e}_0,\dots,\mathbf{e}_p\big),
\end{aligned}$$

denn $f''(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k)=f''(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_i)$ und damit

$$\boldsymbol{\alpha}\big(f(\boldsymbol{x})\big)\Big(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_0,\dots,f''(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_i),\dots,\widehat{f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_k},\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\Big)+(-1)\boldsymbol{\alpha}\big(f(\boldsymbol{x})\big)\Big(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_0,\dots,\widehat{f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_i},\dots,f''(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k),\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\Big)=0\,.$$

(iii) bleibt als Übung.

Wir kommen zu den ***BASISABHÄNGIGEN DARSTELLUNGEN***. Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ der Körper der rellen oder komplexen Zahlen. Es sei nun $\boldsymbol{\omega} : U \to \mathscr{A}_p\left(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m\right)$ von der Klasse C^r. Für ein Vektorfeld $\boldsymbol{s} \in U \to \mathbb{K}^m$ der Klasse C^r schreiben wir $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{v}}\left(\mathbb{K}^m\right)$ und für ein Tangentialfeld $\boldsymbol{t} \in U \to \mathbb{K}^n$ der Klasse C^r entsprechend $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}\left(\mathbb{K}^n\right)$. An jeder Stelle $\boldsymbol{x} \in U$ existiert folglch eine Basis für $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{v}}\left(\mathbb{K}^m\right)$ und $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}\left(\mathbb{K}^n\right)$, so dass diese auch begleitendes *m*-Bein bzw. *n*-Bein verstanden werden kann. Es seien $d\boldsymbol{\tau}^1, \dots, d\boldsymbol{\tau}^n \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}^*\left(\mathbb{K}^n\right)$ die zu $\boldsymbol{t}_1, \dots, \boldsymbol{t}_n \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}\left(\mathbb{K}^n\right)$ dualen Basisformen, also $d\boldsymbol{\tau}^j\left(\boldsymbol{t}_i\right) = \delta_i^j$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Die kanonischen Basisvektoren und Basisformen bezeichnen wir mit $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}\left(\mathbb{K}^n\right)$ und $dx^1, \dots, dx^n \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}^*\left(\mathbb{K}^n\right)$. Für die alternierende vektorwertige *p*-Differentialform schreiben wir

$$\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}_p^r\left(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}\left(\mathbb{K}^n\right); \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{v}}\left(\mathbb{K}^m\right)\right) =: \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{v}}\left(\boldsymbol{\Omega}_p^r\left(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m\right)\right),$$

so dass wir den Punkt $\boldsymbol{x} \in U \subseteq \mathbb{K}^n$ wieder weg lassen können.

SATZ 2.1

Es sei $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{v}}\left(\boldsymbol{\Omega}_p^r\left(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m\right)\right)$. Dann hat $\boldsymbol{\omega}$ die Darstellung

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^m \omega^i \cdot \boldsymbol{s}_i,$$

wobei $\omega^i \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}\left(\boldsymbol{\Omega}_p^r\left(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}\right)\right)$ und $\boldsymbol{s}_i \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{v}}\left(\mathbb{K}^m\right)$ ein Vektorfeld sind. Ferner hat $\omega^i \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}\left(\boldsymbol{\Omega}_p^r\left(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}\right)\right)$ die Darstellung

$$\omega^i = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \omega^i_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\ ,\ \omega^i_{i_1 \cdots i_p} \in \mathbb{K},$$

wobei das Produkt induktiv nach DEFINITION 0.6.8 definiert ist. Insbesondere gilt $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx^i \wedge dx^i = 0$.

BEWEIS

Nach Voraussetzung existiert eine Basis von Vektorfeldern $\boldsymbol{s}_1, \dots, \boldsymbol{s}_m \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{v}}\left(\mathbb{K}^m\right)$ und eine Basis von Tangentialfeldern $\boldsymbol{t}_1, \dots, \boldsymbol{t}_n \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}\left(\mathbb{K}^n\right)$. Folglich kann

$$\boldsymbol{\omega}\left(\boldsymbol{t}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{t}_{i_p}\right) = \sum_{i=1}^m \omega^i\left(\boldsymbol{t}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{t}_{i_p}\right) \cdot \boldsymbol{s}_i \in \boldsymbol{\Gamma}\left(\mathbb{K}^m\right)$$

und

$$\omega^i\left(\boldsymbol{t}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{t}_{i_p}\right) \in \boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{K}).$$

angesehen werden. Da $\boldsymbol{\omega}$ alternierend ist, hat auch ω^i für jedes $1 \leq i \leq m$ diese Eigenschaft. Es sei nun $\omega^i \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}\left(\boldsymbol{\Omega}_p^r\left(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}\right)\right)$. Wir setzen $\omega^i_{i_1 \cdots i_r} := \omega^i\left(\boldsymbol{t}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{t}_{i_p}\right) \in \Gamma(\mathbb{K})$. Es folgt

$$\omega^i = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \omega^i_{i_1 \cdots i_r} d\boldsymbol{\tau}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\boldsymbol{\tau}^{i_r}\ ,$$

wobei

$$\left[\left(d\boldsymbol{\tau}^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\boldsymbol{\tau}^{i_{r-1}}\right)\wedge d\boldsymbol{\tau}^{i_r}\right]\left(\boldsymbol{t}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{t}_{j_r}\right)=\sum_{\substack{\sigma\in S_r\\ \sigma(j_1)<\cdots<\sigma(j_{r-1})}}\operatorname{sgn}\sigma\cdot\left[\left(d\boldsymbol{\tau}^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\boldsymbol{\tau}^{i_{r-1}}\right)\left(\boldsymbol{t}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{t}_{j_{r-1}}\right)\right]\cdot d\boldsymbol{\tau}^{i_r}\left(\boldsymbol{t}_{\sigma(j_r)}\right)$$

Induktiv mit DEFINITION 1.16 4. Eigenschaft definiert ist. Insbesondere gilt mit $\beta\in S_n$

$$d\boldsymbol{\tau}^{\beta(i_1)}\wedge\cdots\wedge d\boldsymbol{\tau}^{\beta(i_r)}=\operatorname{sgn}\beta\cdot d\boldsymbol{\tau}^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\boldsymbol{\tau}^{i_r}\text{ und }\bigwedge_{1\le i\le n}d\boldsymbol{\tau}^{i}\wedge d\boldsymbol{\tau}^{i}=0\,.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

SATZ 2.2

Es sei $\boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{v}}\left(\boldsymbol{\Omega}_p^r\left(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m\right)\right)$ mit $\omega=\sum_{i=1}^{m}\omega^i\cdot s_i$. Dann ist

$$\boldsymbol{d\omega}=\sum_{i=1}^{m}\left(d\omega^i\cdot\boldsymbol{s}_i+\omega^i\wedge\boldsymbol{d\,s}_i\right)$$

Insbesondere finden wir im Banachraum mit dem kanonischen Zusammenhang die Formel

$$\boldsymbol{d\omega}\left(X_1,\ldots,X_p\right)=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\boldsymbol{\omega}'\bullet X_i\bullet\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p\right).$$

BEWEIS

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d\omega}\left(X_1,\ldots,X_p\right)&=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\left(\boldsymbol{\omega}\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p\right)\right)'\bullet X_i\\&\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\boldsymbol{\omega}\left(X_j'X_i-X_i'X_j,X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_p\right)\\&=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\boldsymbol{\omega}'\bullet X_i\cdot\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p\right)\\&\quad+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{\omega}\left(X_1,\ldots,X_j'\cdot X_i,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p\right)\\&\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\boldsymbol{\omega}\left(X_j'X_i-X_i'X_j,X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_p\right)\\&=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\boldsymbol{\omega}'\bullet X_i\cdot\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p\right)\end{aligned}$$

Setzen wir jetzt die lokale Darstellung ein und beachten, dass

$$\boldsymbol{\omega}^j\cdot s_j\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p\right)=\boldsymbol{\omega}^j\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p\right)\cdot s_j$$

gilt, so folgt nach Definition

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d\omega}\left(X_1,\ldots,X_p\right)&=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{p}\left(\left(\boldsymbol{\omega}^j\right)'\bullet X_i\bullet\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p\right)+\boldsymbol{\omega}^j\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p\right)\cdot\boldsymbol{s}_j'\cdot X_i\right)\\&=\sum_{j=1}^{p}\left(d\boldsymbol{\omega}^j\left(X_1,\ldots,X_p\right)\cdot\boldsymbol{s}_j+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\boldsymbol{\omega}^j\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p\right)\cdot\boldsymbol{d\,s}_j\left(X_i\right)\right)\\&=\sum_{i=1}^{m}\left(d\boldsymbol{\omega}^i\cdot s_i+\boldsymbol{\omega}^i\wedge\boldsymbol{d\,s}_i\right)\left(X_1,\ldots,X_p\right)\end{aligned}$$

KOROLLAR 2.3

Es sei $\omega \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}\left(\boldsymbol{\Omega}_p^r\left(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}\right)\right)$, $\boldsymbol{\omega} = \sum\limits_{i_1 \le \cdots \le i_r \le n} \omega_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$. Dann ist

$$d\boldsymbol{\omega} = \sum_{i_1 \le \cdots \le i_r \le n} d\omega_{i_1 \cdots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} ,$$

wobei

$$d\omega_{i_1 \cdots i_p} = \sum_{j=1}^n D_j \omega_{i_1 \cdots i_p} dx^j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\omega_{i_1 \cdots i_p}\right) dx^j .$$

BEWEIS:

Da d als Differential $\mathbf{K}$-linear ist, genügt es die Aussage für $\omega = f\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ zu beweisen. Nach Satz 1.4 ist

$$d\omega = d\left(f\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) = df \wedge \left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) + f \cdot d\left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right)$$

Es sei nun $X \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}\left(\mathbb{K}^n\right)$, $X = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}\left(\mathbb{K}^n\right)$ die zu $dx^1, \ldots, dx^n \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}^*\left(\mathbb{K}^n\right)$ dualen Basisfelder. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} df(X) &= \sum_{i=1}^n h_i df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x^i}(f) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x^i}(f) dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j}(f) dx^j(X) \end{aligned}$$

Offenbar gilt $df \wedge \left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) = df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$. Es bleibt daher zu zeigen, dass $d\left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) = 0$. Dies geschieht durch Induktion nach p.

Für $p = 1$ ist $d\left(dx^{i_1}\right) = 0$ nach KOROLLAR 1.9. Sei nun die Aussage für $p-1$ bewiesen. Wir finden

$$d\left(x^{i_1} \cdot dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} + x^{i_1} \cdot d\left(dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

und damit $d\left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) = dd\left(x^{i_1} \cdot dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) = 0$ nach KOROLLAR 1.9.

KOROLLAR 2.4

Es sei $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{v}}\left(\boldsymbol{\Omega}_p^r\left(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m\right)\right)$. Es sei $f \in \mathscr{C}^r\left(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m\right)$. Es seien $X_1, \ldots, X_p \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}\left(\mathbb{K}^n\right)$. Zu jedem $X \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}\left(\mathbb{K}^n\right)$ existiere ein $Y \in \boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{t}}\left(\mathbb{K}^m\right)$ mit $f'(X(\boldsymbol{x})) = Y(f(\boldsymbol{x}))$. Dann gilt:

1. $f^* d\boldsymbol{\tau}^i = d\left(f^*\boldsymbol{\tau}^i\right) = d\left(\boldsymbol{\tau}^i \circ f\right) = df_i = \sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y^j} dy^j$, wenn $d\boldsymbol{\tau}^1, \ldots, d\boldsymbol{\tau}^n$ die zu $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n$ dualen Basisfelder sind.

2. $f^* d\boldsymbol{\omega} = \sum\limits_{i=1}^m \left(d\left(f^*\boldsymbol{\omega}\right) \cdot f^*\boldsymbol{s}_i + f^*\omega^i \wedge d f^*\boldsymbol{s}_i\right)$, wenn $f^*s_1, \ldots, f^*s_m$ die zurückgeholten Basisfelder sind.

.