5. INTEGRATION AUF MANNIGFALTIGKEITEN

In diesem Abschnitt setzen wir M als endlichdimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Partition der Einheit voraus.

Definition 5.1

Es sei $V \subseteq \mathbf{R}^n$ offen und $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^n(V_{\mathbf{R}})$. Die Differentialform $\boldsymbol{\omega}$ heißt ***integrierbar***, wenn $\boldsymbol{\omega}(\frac{\partial}{\partial x^1};\ldots;\frac{\partial}{\partial x^n}): V \to \mathbf{R}$ integrierbar auf V ist. Mit anderen Worten

$$\int_V \boldsymbol{\omega} := \int_V \boldsymbol{\omega}(\frac{\partial}{\partial x^1};\ldots;\frac{\partial}{\partial x^n}).$$

Transformationsformel 5.2

Es sei $V \subseteq \mathbf{R}^n$ offen und zusammenhängend und $f: V \to \mathbf{R}^m$ eine injektive C^1 – Abbildung auf eine offene Teilmenge $f(V) \subseteq \mathbf{R}^m$. Es sei $\omega \in \Omega^n(f(V)_{\mathbf{R}})$.

ω ist genau dann über $f(V)$ integrierbar, wenn $f^*\omega$ über V integrierbar ist. Es ist dann

$$\int_{f(V)} \boldsymbol{\omega} := \begin{cases} +\int_{f(V)} \boldsymbol{\omega}, & \text{falls } f \text{ positiv orientiert ist,} \\ -\int_{f(V)} \boldsymbol{\omega} & \text{falls } f \text{ negativ orientiert ist.} \end{cases}$$

Hierfür schreiben wir kurz $\int_{f(V)} \boldsymbol{\omega} = \operatorname{sgn}(f')\int_V f^*\boldsymbol{\omega}$.

Beweis:

Es ist $f_*(\frac{\partial}{\partial x^k}) = \sum_{i=1}^n (D_k f^i)\frac{\partial}{\partial y^i}$. Folglich gilt für das pull back der Determinantenform $\boldsymbol{\omega}$ auf $f(V)$:

$$\begin{aligned}(f^*\boldsymbol{\omega})(p)(\frac{\partial}{\partial x^1}_{|p},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}_{|p}) &= \boldsymbol{\omega}(f(p))(f_*(\frac{\partial}{\partial x^1})_{|f(p)},\ldots,f_*(\frac{\partial}{\partial x^n})_{|f(p)}) \\ &= \boldsymbol{\omega}(f(p))(\sum_{i=1}^n D_1 f^i \frac{\partial}{\partial y^i}_{|f(p)},\ldots,\sum_{i=1}^n D_n f^i \frac{\partial}{\partial y^i}_{|f(p)}) \\ &= \det|f'(p)|_{|p} \cdot \boldsymbol{\omega}(f(p))(\frac{\partial}{\partial y^1}_{|f(p)},\ldots,\frac{\partial}{\partial y^n}_{|f(p)}) \\ &= \operatorname{sgn}(f')\cdot|f'(p)|\cdot \boldsymbol{\omega}(f(p))(\frac{\partial}{\partial y^1}_{|f(p)},\ldots,\frac{\partial}{\partial y^n}_{|f(p)}).\end{aligned}$$

Nach dem klassischen Transformationssatz und 5.1 ist damit

$$\begin{aligned}\int_{f(V)} \boldsymbol{\omega} &= \int_{f(V)} \boldsymbol{\omega}(\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}) \\ &= \operatorname{sgn}(f')\int_V |f'(x)|\cdot\boldsymbol{\omega}(f(x))(\frac{\partial}{\partial y^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial y^n}) \\ &= \operatorname{sgn}(f')\int_V (f^*\boldsymbol{\omega})(\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}) \\ &= \operatorname{sgn}(f')\int_V (f^*\boldsymbol{\omega}).\end{aligned}$$

Wir können jetzt die Integration auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Dabei beschränken wir uns zuerst auf kompakte und orientierte Mannigfaltigkeiten.

Definition 5.3

Es sei M eine kompakte und orientierte k-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^r. Es sei $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^k(V_{\mathbf{R}})$ und h_V eine positiv orientierte Karte, d.h. $\frac{\partial}{\partial v^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v^n}$ ist positiv orientiert. Es sei $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\omega}) := \operatorname{supp}(\boldsymbol{\omega}(\frac{\partial}{\partial v^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v^n}))$ und $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\omega}) \subseteq V$.

Dann ist $(h_V^{-1})^* \boldsymbol{\omega}$ über $h_V(V)$ integrierbar und wir setzen $\int\limits_M \boldsymbol{\omega} = \int\limits_{h_V(V)} (h_V^{-1})^* \boldsymbol{\omega}$. Ist h_W eine andere positiv orientierte Karte mit $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\omega}) \subseteq W$, so ist mit 5.2

$$\begin{aligned}
\int\limits_{h_V(V)} (h_V^{-1})^* \boldsymbol{\omega} &= \int\limits_{h_V(V \cap W)} (h_V^{-1})^* \boldsymbol{\omega} \\
&= \int\limits_{h_V(V \cap W)} (h_W^{-1} \circ h_W \circ h_V^{-1})^* \boldsymbol{\omega} \\
&= \int\limits_{h_V(V \cap W)} (h_W \circ h_V^{-1})^* \circ (h_W^{-1})^* \boldsymbol{\omega} \\
&= \int\limits_{(h_W \circ h_V^{-1}) \circ h_V(V \cap W)} (h_W^{-1})^* \boldsymbol{\omega} \\
&= \int\limits_{h_W(V \cap W)} (h_W^{-1})^* \boldsymbol{\omega} \\
&= \int\limits_{h_W(W)} (h_W^{-1})^* \boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

Also ist die Definition unabhängig von der gewählten Karte.

Bemerkung 5.4

Ist $\boldsymbol{\alpha}$ eine C^r-Funktion auf der C^r-Mannigfaltigkeit M mit kompaktem Träger, so ist $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\alpha\omega})$ kompakt.

Will man ein globales Integral zur Verfügung haben, so ist man gezwungen mittels einer Partition der Einheit die Differentialform, deren Integration nur durch Karten definiert ist, in einem Atlas zusammenzukleben.

Definition 5.5

Es sei M eine orientierte und kompakte C^r-Mannigfaltigkeit. Es sei $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}_r^k(M_{\mathbf{R}})$ eine Differentialform vom Grad $k = \dim(M)$. Es sei $\mathbf{1} = \sum\limits_{V \in \mathcal{O}} p_V$ eine Zerlegung der Einheit assoziiert zu einem Atlas $\mathscr{A}$. Zu jedem $V \in \mathcal{O}$ existiert also eine Karte h_W mit $V \subseteq W$. Wir definieren

$$\int\limits_M \boldsymbol{\omega} := \sum_{V \in \mathcal{O}} \int\limits_M p_V \boldsymbol{\omega}$$

und haben nur zu überlegen, dass diese Definition unabhängig von der Zerlegung der Einheit ist. Dazu sei $\mathbf{1} = \sum\limits_{U \in \mathcal{O}'} p_U$ eine andere Zerlegung der Einheit assoziiert zu $\mathscr{A}$.

$$\sum_{U\in\mathfrak{O}'}\int_M p_U\boldsymbol{\omega}=\sum_{U\in\mathfrak{O}'}\int_M(\sum_{V\in\mathfrak{O}}p_V)p_U\boldsymbol{\omega}$$
$$\stackrel{*}{=}\sum_{U\in\mathfrak{O}'}\sum_{V\in\mathfrak{O}}\int_M p_V p_U\boldsymbol{\omega}$$
$$=\sum_{V\in\mathfrak{O}}\int_M(\sum_{U\in\mathrm{O}'}p_U)p_V\boldsymbol{\omega}$$
$$=\sum_{V\in\mathfrak{O}}\int_M p_V\boldsymbol{\omega}$$
Die Gleichheit (*) ist durch das Integral im $\mathbf{R}^k$ gerechtfertigt.

Definition 5.6
Es sei (M,g) eine pseudoriemannsche orientierte C^r – Mannigfaltigkeit. Für $p\in M$ sei $t_1,\ldots,t_n$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von T_pM. Dann definiert
$$\boldsymbol{\mu}_g(p)(X_1(p),\ldots,X_n(p)):=\det(g(p)(X_i(p),t_j))$$
eine Differentialform vom Grad $n=\dim(M)$, also $\boldsymbol{\mu}_g\in\boldsymbol{\Omega}^n_r(M_{\mathbf{R}})$. Sie heisst ***die durch g induzierte Volumenform*** von M.

Ist $s_1,\ldots,s_n$ eine andere positiv orientierte Orthonormalbasis von T_pM, dann gibt es eine Abbildung $\boldsymbol{\Lambda}:T_pM\to T_pM$ mit $\boldsymbol{\Lambda}(t_i)=s_i$ und $\det(\boldsymbol{\Lambda})=1$. Folglich ist $\boldsymbol{\mu}_g$ nach 5.2 unabhängig von der Wahl der positiv orientierten Orthonormalbasis definiert.

Ist $K\subseteq M$ kompakt und $\boldsymbol{\chi}_K$ die charakteristische Funktion, so heisst $\int_M\boldsymbol{\chi}_K\boldsymbol{\mu}_g$ das ***Volumen*** von K.

Man zeigt nun leicht, dass in der Karte h_V die Volumenform $\boldsymbol{\mu}_g$ die Form
$$\boldsymbol{\mu}_g=\sqrt{|\det(g(X_i,X_j))}dv^1\wedge\cdots\wedge dv^n\quad\text{für}\quad g:=\sum_{i,j}g_{ij}dv^i\otimes dv^j$$
hat.

Bemerkung 5.7
Bisher haben wir uns keine Gedanken darüber gemacht welches Integral wir voraussetzen. Dies hat den Vorteil, dass jeder das ihm bekannte Integral verwenden kann.

Wir wollen jedoch, da es aus Zeitgründen in der Analysisvorlesung meistens nicht vorkommt, einen kurzen Weg zeigen, der zu den verschiedensten Integralen führt. Das im folgenden definierte Integral heisst ***Daniell-Stone-Integral***.

Definition 5.8
Es sei X eine nicht leere Menge und E eine Familie von reellen Funktionen auf X, d.h. $f\in\mathrm{E}:\Leftrightarrow f:X\to\mathbf{R}$. Die Familie E heißt ***elementar***, wenn gilt:

1. E ist ein Vektorraum;
2. $f\in\mathrm{E}$ impliziert $|f|\in\mathrm{E}$.

Ein lineares Funktional $\mu:\mathrm{E}\to\mathbf{R}$ heißt ***positiv***, wenn für jedes $f\in\mathrm{E}$ mit $f\geq 0$ auch $\mu(f)\geq 0$ ist.

Definition 5.9
Ein Funktional μ heißt ***monoton stetig***, wenn für jede Folge $(f_n) \in \mathrm{E}$, die monoton gegen $f \in \mathrm{E}$ konvergiert, auch $\mu(f_n)$ konvergiert gegen $\mu(f)$ folgt. Dabei ist es gleichgültig um welche Monotonie es sich handelt, nur festlegen muß man sich.

Satz 5.10
Folgende Aussagen für $\mu \in \mathrm{E}'$ sind äquivalent:

1. μ ist monoton stetig;
2. Für jede monoton gegen 0 konvergierende Folge $(f_n) \in \mathrm{E}$ konvergiert $\mu(f_n)$ gegen 0.

Den trivialen Beweis überlassen wir dem Leser.

Definition 5.11
Ein lineares, positives und monoton stetiges Funktional auf der Familie der elementaren reellen Funktionen E heißt ein ***Daniell-Stone-Integral*** und die Funktionen der Familie E heißen ***elementare Funktionen des Integrals***.
Für $\mu(f)$ schreibt man auch $\int f\,d\mu$ oder für $\mu_X(f)$ genauer $\int\limits_X f\,d\mu$.

Beispiele

1. $X = [a,b] \subset \mathbf{R}$, $\mathrm{E} = C^0([a,b])$, $\mu(f) := \int\limits_a^b f(x)\,dx$.
2. Sei X ein lokal kompakter Raum, zum Beispiel jeder endlichdimensionale $\mathbf{R}$-Vektorraum. Sei $\mathrm{E} = C_c^0([a,b])$ die Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in X. Ist μ ein lineares Funktional stetig in der kompakten Konvergenz, so folgt aus Dinis Theorem die monotone Stetigkeit von μ und ist damit ein Daniell-Stone-Integral.

Ein Integral dieser Art heißt auch ***Radon-Integral*** des lokal kompakten Raumes X.

Wir setzen als erstes Beispiel nun $X := \mathbf{R}$ und $\mathrm{E} = C_c^0(\mathbf{R})$. Dann ist $\int\limits_{\mathbf{R}} f(x)\,dx$.

Als zweites Beispiel wählen wir $X := \mathbf{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathrm{E} = C_c^0(\mathbf{N})$ und $\mu(f) := \sum\limits_{i=0}^{\infty} f(i)$. (Kompakt bedeutet hier endliche Menge.)

3. 3. Sei X eine beliebige Menge und $x_0 \in X$. Sei $\mathrm{E} := Abb(X,\mathbf{R})$ und definiere $\mu_{x_0}(f) := f(x_0)$. Diese Daniell-Stone-Integral heißt auch ***Dirac-Integral***.
4. Ersetzen wir in der Definition des Riemann-Integrales in der Partition die Stellen x_i und x_{i-1} durch $\phi(x_i)$ und $\phi(x_{i-1})$, wobei ϕ eine positive beschränkte nicht fallende Funktion auf $\mathbf{R}$ ist, so gelangen wir, wenn wir f als beschränkt voraussetzen, zum ***Riemann-Stieltjes-Integral***, in Zeichen $\int\limits_{[a,b]} f\,d\phi$.
5. Insbesondere ist für $\mathrm{E} = C_c^0(\mathbf{R})$ das Funktional $\mu : \mathrm{E} \to \mathbf{R}$ definiert durch $\mu(f) := \int\limits_{\mathbf{R}} f\,d\phi$ linear und nicht negativ, folglich ein Radon-Integral.

Die **Daniell-Stone Erweiterung** dieses Integrals heißt ***Lebesgue-Stiltjes-Integral***.

Bemerkung
Das wohl wichtigste Ergebnis der Integrale auf $\mathbf{R}$ ist durch das Theorem von Riesz gegeben: Jedes ***Radon-Integral*** auf $\mathbf{R}$ ist ein ***Lebesgue-Stieltjes-Integral***.

6. In diesem letzten Beispiel sei $X := M$ eine C^r-Mannigfaltigkeit und $\mathrm{E} = C_c^0(M)$. Um nun ein positives Funktional μ zu bekommen, benötigen wir einige Vorbereitungen.

Mit $\mathrm{E} := C_K^0(M)$ bezeichnen wir die Funktionen aus $C_c^0(M)$, die außerhalb des Kompaktums $K \subset M$ verschwinden.

Es sei $\mu : \mathrm{E} \to \mathbf{R}$ eine positive lineare Abbildung. Dann ist $\mu : C_K^0(M) \to \mathbf{R}$ für jedes Kompaktum K beschränkt, d.h. es existiert eine Konstante $k \geq 0$ mit $|\mu(f)| = k|f|$. Insbesondere ist jedes Funktional beschränkt.

Es sei $\mathcal{O} \in Cov(M)$, und für jedes $V \in \mathcal{O}$ sei μ_V ein Funktional auf $C_c^0(V)$. Gilt $\mu_V = \mu_W$ auf $C_c^0(V \cap W)$, dann existiert ein eindeutiges Funktional μ auf $\mathrm{E} = C_c^0(M)$, dessen Restriktion auf $C_c^0(V)$ für jedes $V \in \mathcal{O}$ mit μ_V übereinstimmt. Ist darüber hinaus μ_V für jedes $V \in \mathcal{O}$ positiv, so ist μ positiv.

Die Beweise dieser beiden Lemmata können bei ***Lang*** nachgelesen werden.

Es sei nun $\dim(M) = n$ und $\boldsymbol{\omega}$ eine stetige Differentialform, also $\boldsymbol{\omega} \in \Omega_0^n(M_{\mathbf{R}})$.

Es existiert ein eindeutiges positives Funktional $\mu_{|\omega|} : \mathrm{E} \to \mathbf{R}$ mit folgender Eigenschaft:
Ist h_V eine Karte und $\omega := f\,dv^1 \wedge \cdots \wedge dv^n \in \Omega_0^n(V_{\mathbf{R}})$, dann gilt für jedes $g \in \mathrm{E}$ mit $\mathrm{supp}(g) \subset V$ die lokale Darstellung $\mu_{|\omega|}(g) := \int\limits_{h_V(V)} g(h_V^{-1}(x))|f(x)|dx$, wobei dx das Riemann- oder Lebesgue-Maß ist.
Insbesondere ist $\mu_{|\omega|}$ ein Daniell-Stone-Integral.

Ist $d\phi(x) = g(h_V(x))dx$ (Transformationssatz für Radon-Maße), so ist $\int\limits_{h_V(V)} |f|d\phi$ ein Riemann-Stiltjes- oder Lebesgue-Stiltjes-Integral.

Ist M sogar eine orientierte Mannigfaltigkeit und h_V positiv orientiert, so kann auf den Betrag von f verzichtet werden. Wir dürfen dann kurz schreiben $\mu_{|\omega|}(g) := \int\limits_M g\omega$.

Dies zeigt uns noch einmal die Richtigkeit unserer Definition am Anfang dieses Abschnittes.

Als nächstes wollen wir den Satz von Stokes vorbereiten.

Definition 5.12
Es sei M eine C^r-Mannigfaltigkeit der Dimension n.

1. Unter einem n-Würfel in $\mathbf{R}^n$ verstehen wir das n-fache kartesische Produkt des Einheitsinterwall $[0,1]$ und bezeichnen ihn mit W^n, also $W^n = [0,1]^n$. Ferner setzen wir $I^n := id_{\mathbf{R}^n}|W^n$.

Ein singulärer n-Würfel der Klasse C^r in $V \subset M$ ist eine Abbildung $c^n : W^n \to V$ der Klasse C^r. Für $n = 0$ setzen wir $\mathbf{R}^0 := [0,1]^0 := \{0\}$.

Mit $\mathrm{C}^r_n(M)$ bezeichnen wir die freie abelsche Gruppe aller singulären n-Würfel der Klasse C^r. Mit anderen Worten: $c \in \mathrm{C}^r_n(M) \Leftrightarrow c = \sum_{i=1}^{k} a_i c_i^n$ mit $a_i \in \mathbf{Z}$ und wobei c_i^n singuläre n-Würfel der Klasse C^r sind. Das Element c heißt dann eine n-Kette. Ist die Dimension klar, so lassen wir n einfach weg.

Beispiel: $2(c_1 + 3c_4) - \ 2(c_1 + c_2 + c_3) \ = -2c_2 - 2c_3 + 6c_4$.

2. Durch
$I^n_{(i,0)}(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_n) := I^n(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)$ und $I^n_{(i,1)}(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_n) := I^n(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)$
werden zwei $(n-1)-$Würfel definiert.
$I^n_{(i,0)}$ heißt $(i,0)-$te Seite und $I^n_{(i,1)}$ heißt $(i,1)-$te Seite von I^n.

Damit können wir jetzt den Rand des kanonischen n-Würfels definieren.

$$\partial_n I^n := \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha \in \{0,1\}} (-1)^{i+\alpha} I^n_{(i,\alpha)}$$

Für einen singulären n-Würfel $c \in \mathrm{C}^r_n(M)$ definieren wir

$$c^n_{(i,\alpha)} := c \circ I^n_{(i,\alpha)} \text{ und } \partial_n c := \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha \in \{0,1\}} (-1)^{i+\alpha} c^n_{(i,\alpha)}.$$

Außerdem verlangen wir die $\mathbf{Z}$-linearität von ∂_n.

Lemma 5.13

1. Für $c \in \mathrm{C}^r_n(M)$ ist $\partial_{n-1}\partial_n = 0$, kurz $\partial\partial = 0$.
2. Für $\omega := f\, dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega^{n-1}(\mathbf{R}^n{}_{\mathbf{R}})$ ist

$$I^n_{(i,\alpha)}{}^*(\omega) = \begin{cases} f \circ I^n_{(i,\alpha)}\, dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n, \text{ falls } i = j, \\ 0, \text{ falls } i \neq j. \end{cases}$$

Beweis

1. $\partial(\partial c) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha\in\{0,1\}} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \sum_{\beta\in\{0,1\}} (-1)^{i+j+\alpha+\beta} (c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$ und $(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = c \circ (I_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$.

Es sei nun $i < j$ und $x = (x_1,\dots,\overset{\wedge}{x_i},\dots,x_n)$, dann sind
$(I^n_{(i,\alpha)})_{(j-1,\beta)}(x) = (x_1,\dots,x_{i-1},\alpha,x_{i+1},\dots,x_{j-1},\beta,x_{j+1},\dots,x_n)$ und $(I^n_{(j,\beta)})_{(i,\alpha)}(x) = (x_1,\dots,x_{i-1},\alpha,x_{i+1},\dots,x_{j-1},\beta,x_{j+1},\dots,x_n)$.
Folglich ist $(-1)^{i+j-1+\alpha+\beta}(I^n_{(i,\alpha)})_{(j-1,\beta)} + (-1)^{i+j+\alpha+\beta}(I^n_{(j,\beta)})_{(i,\alpha)} = 0$.

2. Sei oBdA $i < j$, dann ist

$$\begin{aligned}(I^n_{(i,\alpha)})^*(f\, dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n) &= (f \circ I^n_{(i,\alpha)}) d(x^1 \circ I^n_{(i,\alpha)}) \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^j} \wedge \dots \wedge d(x^n \circ I^n_{(i,\alpha)}) \\ &= (f \circ I^n_{(i,\alpha)}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge d\alpha \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n.\end{aligned}$$

Damit ist wegen $d\alpha = 0$ die Aussage bewiesen.

Beispiel

Es sei $\mathbf{K}_r^3$ die abgeschlossene Kugel im $\mathbf{R}^3$ vom Radius r. Es sei $c: W^3 \to \mathbf{R}^3$ definiert durch $c(s,t,u) := (s \cdot \sin(t\pi)\cos(2u\pi), s \cdot \sin(t\pi)\sin(2u\pi), s \cdot \cos(t\pi))$. Dies ist ein singulärer 3-Würfel im $\mathbf{R}^3$.

Ferner gilt: $I_{(1,0)}^3(x,y) = (0,x,y)$, $I_{(1,1)}^3(x,y) = (1,x,y)$, $I_{(2,0)}^3(x,y) = (x,0,y)$, $I_{(2,1)}^3(x,y) = (x,1,y)$, $I_{(3,0)}^3(x,y) = (x,y,0)$ und $I_{(3,1)}^3(x,y) = (x,y,1)$.

Daraus ergibt sich der Rand von c durch:

$c_{(1,0)}(x,y) = (0,0,0)$, $c_{(1,1)}(x,y) = (\sin(x\pi)\cos(2y\pi), \sin(x\pi)\sin(2y\pi), \cos(x\pi))$, $c_{(2,0)}(x,y) = (0,0,x)$, $c_{(2,1)}(x,y) = (0,0,-x)$, $c_{(3,0)}(x,y) = (x\sin(y\pi),0,x\cos(2y\pi))$ und $c_{(3,1)}(x,y) = (x\sin(y\pi),0,x\cos(2y\pi))$.

Insgesammt liefert dies:

$$\begin{aligned}\partial c &= -c_{(1,0)}(x,y) + c_{(1,1)}(x,y) - c_{(2,0)}(x,y) + c_{(2,1)}(x,y) - c_{(3,0)}(x,y) + c_{(3,1)}(x,y) \\ &= c_{(1,1)}(x,y) - 2c_{(2,0)}(x,y).\end{aligned}$$

An diesem Beispiel erkennt man, dass als Rand singulärer Würfel Nullmengen auftreten können.

Definition 5.14

Es sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^r mit $r \geq 1$, $c \in \mathrm{C}_n^r(M)$, h_V eine Karte, $c \circ I^n \subset V$ und $\omega \in \Omega_r^n(V_{\mathbf{R}})$.

1. $\displaystyle\int_c \omega := \int_{I^n} c^*(\omega)$.

2. $\displaystyle\int_{\sum_{i=1}^k a_i c_i} \omega := \sum_{i=1}^k a_i \int_{c_i} \omega$.

Satz von Stokes I

Es sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^r mit $r \geq 1$, $c \in \mathrm{C}_n^r(M)$, h_V eine Karte, $c \circ I^n \subset V$ und $\omega \in \Omega_r^{n-1}(V_{\mathbf{R}})$. Dann gilt $\displaystyle\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$.

Beweis

Es genügt $\displaystyle\int_{\partial c_i} \omega = \int_{c_i} d\omega$ zu zeigen, wobei $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \overset{\wedge}{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n$ ist. Wegen $\displaystyle\int_{\partial c_i} \omega = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \in \{0,1\}} (-1)^{i+\alpha} \int_{I_{(i,\alpha)}^n} c_i^*(\omega)$ und $\displaystyle\int_{c_i} d\omega = \int_{I^n} c_i^*(d\omega) = \int_{I^n} d(c_i^*(\omega))$ dürfen wir sogar $c_i = I^n$ annehmen.

$$\begin{aligned}\int_{\partial I^n} \omega &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \in \{0,1\}} (-1)^{i+\alpha} \int_{W^{n-1}} (I_{(i,\alpha)}^n)^*(\omega) \\ &\overset{5.13.2}{=} (-1)^{j+1} \int_{W^{n-1}} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \ldots, x_n)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \overset{\wedge}{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &\quad + (-1)^j \int_{W^{n-1}} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \overset{\wedge}{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\int_{W^n} d\omega = \int_{W^n} D_j f \; dx^j \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^j \wedge \cdots \wedge dx^n = (-1)^{j-1} \int_{W^n} D_j f \; dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

$$\overset{*}{=} (-1)^{j-1} \int_{W^{n-1}} \int_0^1 (D_j f \; dx^j) dx^1 \ldots dx^j \ldots dx^n$$

$$\overset{**}{=} (-1)^{j-1} \int_{W^{n-1}} [f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n)] \; dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

wobei in (*) der ***Satz von Fubini*** und in (**) der ***Hauptsatz der Integralrechnung*** eingeht. Jetzt folgt leicht

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\sum_{i=1}^k a_i \partial c_i} \omega = \sum_{i=1}^k a_i \int_{\partial c_i} \omega = \sum_{i=1}^k a_i \int_{\partial I^n} (c_i)^*(\omega) = \sum_{i=1}^k a_i \int_{I^n} d((c_i)^*(\omega))$$

$$= \sum_{i=1}^k a_i \int_{I^n} (c_i)^*(d\omega) = \sum_{i=1}^k a_i \int_{c_i} d\omega = \int_{\sum_{i=1}^k a_i c_i} d\omega = \int_c d\omega.$$

Beispiel

Es sei die Mannigfaltigkeit $M := \Psi(W^2) \subset \mathbf{R}^4$ definiert durch die Parameterdarstellung

$$\Psi(s,t) := (t\sin(s\pi), t\cos(s\pi), st, s-t), \; \omega := x_2 dx^1 - x_1 dx^2 + x_3 dx^4 \in \Omega^1(M_{\mathbf{R}}).$$

Gesucht ist $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$

Lösung

Wir dürfen $\Psi = c$ als singulären 2-Würfel auffassen. Zuerst berechnen wir den Rand ∂c: $I_{(1,0)}(x) = (0,x)$, $I_{(1,1)}(x) = (1,x)$, $I_{(2,0)}(x) = (x,0)$ und $I_{(2,1)}(x) = (x,1)$.

Dies ergibt $\partial c = -c_{(1,0)}(x) + c_{(1,1)}(x) + c_{(2,0)}(x) - c_{(2,1)}(x)$, wobei $c_{(1,0)}(x) = (0,x,0,-x)$, $c_{(1,1)}(x) = (0,-x,x,1-x)$, $c_{(2,0)}(x) = (0,0,0,x)$ und $c_{(2,1)}(x) = (\sin(x\pi), \cos(x\pi), x, x-1)$ sind.

Wir erhalten also

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = -\int_{c_{(1,0)}} \omega + \int_{c_{(1,1)}} \omega + \int_{c_{(2,0)}} \omega - \int_{c_{(2,1)}} \omega$$

$$= -\int_0^1 (c_{(1,0)})^*(\omega) + \int_0^1 (c_{(1,1)})^*(\omega) + \int_0^1 (c_{(2,0)})^*(\omega) = -\int_0^1 (c_{(2,1)})^*(\omega)$$

$$= -0 + \int_0^1 -x dx + 0 - \int_0^1 (1+x) dx = -2.$$

Andererseits ist $d\omega = dx^2 \wedge dx^1 - dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 = -2dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4$. Wir erhalten damit:

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{W^2} c^*(d\omega) = \int_{W^2} d(c^*(\omega)) = \int_{W^2} (-3t - s) ds \wedge dt = -\int_0^1 \int_0^1 (3t+s) ds\, dt = -2.$$

Definition 5.15

Es sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^r. Eine Teilmenge $D \subset M$ heißt regulär, wenn entweder

1. eine offene Umgebung W existiert mit $W \cap D = \varnothing$ oder $W \subset D$, oder
2. eine Karte h_W existiert mit $h_W(W \cap D) = h_W(W) \cap H_n^+$, wobei $H_n^+ := \{ x \in \mathbf{R}^n \mid x_n \geq 0 \}$ ist.

Wie üblich bezeichnen wir wieder das Innere von D mit $\overset{\circ}{D}$ und den Rand von D mit ∂D.

3. Es sei $p \in \partial D$. Ein Tangentialvektor $\mathbf{v} \in T_pM$ heißt nach ***außen zeigend***, wenn es eine Abbildung $c:[0,1] \to M$ der Klasse C^1 gibt mit $\dot{c}(t) = \mathbf{v}$ und $c(0,\varepsilon) \subseteq M \setminus D$ für ein $\varepsilon > 0$.

Es sei $\mathbf{v} \in T_pM$ nach außen zeigend.

4. Die Basis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ von $T_p\partial D$ heißt positiv orientiert, wenn $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ positiv orientiert ist.

Satz von Stokes II

Es sei M eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit der Klasse C^r, $r \geq 1$, $D \subset M$ regulär und zusammenhängend. Es sei $\omega \in \Omega_r^{n-1}(M)$ mit kompaktem Träger. Es gilt

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega .$$

Beweis

Wir nennen $c: W^n \to M$ regulär, wenn c in einer Umgebung von W^n zu einem orientierungserhaltenden Diffeomorphismus fortgesetzt werden kann. Ist $p \in \mathring{D}$, so wählen wir reguläres $c: W^n \to M$ mit $c(W^n) \subset \mathring{D}$. Dies ist sicher möglich, man lasse einfach den Würfel schrumpfen (zum Beispiel wähle $c_1 := \frac{1}{r}c,\ r > 0$ r groß genug).

Ist $p \in \partial D$, so wählen wir reguläres $c: W^n \to M$ mit $c(W^n) \subseteq \overline{D}$, $c(W^n) \cap \partial D = c_{(n,0)}(W^{n-1})$ und p auf der $(n,0)$-ten Seite von I^n. Danach wählen wir eine offene Umgebung U von $c^{-1}(p)$ mit $c(U) \subseteq c(W^n) \cap (M \setminus D)$, die ∂I^n nur in der $(n,0)$-ten Seite schneidet.

Wir setzen $V := c(U)$ und überdecken $\operatorname{supp}(\omega) \cap \overline{D}$ mit solchen V's. Seien dies $V_1, \ldots, V_k$. Es seien $c_i : I^n \to M$ die zugehörigen Kettenabbildungen und es sei $V_0 := M \setminus (\overline{D} \cap \operatorname{supp}(\omega))$.

Es sei nun $\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{k} \tau_i$ eine zu $V_1, \ldots, V_k$ passende Zerlegung der Einheit. Dann ist in einer Umgebung von $\operatorname{supp}(\omega) \cap \overline{D}$ auch $\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{k} \tau_i$. Wegen $d\mathbf{1} = \mathbf{0}$, ist $d\omega = d(\sum_{i=1}^{k} \tau_i \omega) = \sum_{i=1}^{k} d(\tau_i \omega) = \sum_{i=1}^{k} \tau_i (d\omega)$.

Ist nun c_i ein regulärer n-Würfel mit $c_i(W^n) \subset D$, so ist $\int_{\partial c_i} \tau_i \omega = 0 = \int_{\partial D} \tau_i \omega$, denn $\operatorname{supp}(\omega) \subset c_i(\mathring{W}^n) \subset \mathring{D}$. Im anderen Fall ist $\tau_i \omega = \mathbf{0}$ auf ∂c_i, außer vielleicht in inneren Punkten von $(c_i)_{(n,0)}$. Nun ist $(c_i)_{(n,0)}$ positiv orientiert, wenn n gerade, sonst negativ orientiert. Also gilt

$$\int_{\partial c_i} \tau_i \omega \overset{\overbrace{}^{*}}{=} (-1)^n \int_{(c_i)_{(n,0)}} \tau_i \omega \overset{\overbrace{}^{**}}{=} (-1)^n (-1)^n \int_{\partial D} \tau_i \omega = \int_{\partial D} \tau_i \omega ,$$

wobei (*) nach Definition von ∂c_i gilt und (**) aus der Orientierung folgt. Insgesamt erhalten wir damit

$$\int_D d\omega = \sum_{i=1}^{k} \int_D d(\tau_i \omega) = \sum_{i=1}^{k} \int_{c_i} d(\tau_i \omega) \overset{\overbrace{}^{\text{Stokes I}}}{=} \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial c_i} \tau_i \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial D} \tau_i \omega = \int_{\partial D} \sum_{i=1}^{k} \tau_i \omega = \int_{\partial D} \omega .$$

Hieraus ergibt sich eine wichtige Folgerung.

Korollar 5.16
Ist M eine kompakte orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^1 und $\omega \in \Omega_1^{n-1}(M)$ mit kompaktem Träger, so ist $\int\limits_M d\omega = 0$.

Beweis
Unmittelbar aus Stokes II, denn $\partial M = \varnothing$.

Beispiel
Es sei $M := \{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z = 4 \}$. Dies ist eine Untermannigfaltigkeit (Kegel) des $\mathbf{R}^3$. Es sei $D := \{ \mathbf{x} \in M \mid z \geq -5 \}$ und $\omega = 2ydx + xzdy + 2xydz \in \Omega^1(\mathbf{R}^3{}_{\mathbf{R}})$.

Gesucht ist $\int\limits_D d\omega = \int\limits_{\partial D} \omega$ mit Stokes II.

Lösung
Zuerst bemerken wir, dass ω keinen kompakten Träger besitzt. Deshalb multiplizieren wir ω mit einer Funktion α , die einen kompakten Träger hat und auf $\bar{D}$ den Wert **1** annimmt. Diese existiert.
Dann hat $\alpha\omega =: \varpi$ einen kompakten Träger, stimmt auf $\bar{D}$ mit ω überein und erfüllt die Vorausetzung von Stokes II. Die restlichen Voraussetzungen sind trivialerweise erfüllt.

Wir berechnen zuerst $\int\limits_D d\omega$. Es sei $B = \{ (s,t) \in \mathbf{R}^2 \mid s^2 + t^2 \leq 9 \}$ und $\Phi(s,t) := (s,t,4-s^2-t^2)$. Dann ist $\Phi(B) = D$ und $\int\limits_D d\omega = \int\limits_B \Phi^* d(\omega) = \int\limits_B d(\Phi^*(\omega))$.
Nun ist $\Phi^*(\omega) = 2tds + s(4-s^2-t^2)dt + 2st\,d(4-s^2-t^2) = (2t-4s^2t)ds + (4s-s^3-st^2-4st^2)dt$.
Damit ergibt sich:

$$\int\limits_B (2+s^2-5t^2)ds \wedge dt = \int\limits_{-3}^{3} \int\limits_{-\sqrt{9-t^2}}^{\sqrt{9-t^2}} (2t-4u^2t)dudt = -63\pi .$$

Einfacher geht es mit Stokes I.

Man definiere $c: W^2 \to B$ durch $c(u,v) = (3u\cos(2v\pi), 3u\sin(2v\pi))$, dann ist $c(W^2) = B$ und $\int\limits_B \Phi^*(d\omega) = \int\limits_{W^2} c^*(\Phi^*(d\omega)) = \int\limits_{W^2} (\Phi \circ c)^*(d\omega)$.
Als zweites berechnen wir den Rand ∂D und finden $\partial D = \{ (x,y,-5) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 9 \}$.

Eine Parameterdarstellung ist leicht anzugeben: $\lambda(t) = (3\cos(t), 3\sin(t))$ für $t \in [0,2\pi]$.

Wir erhalten also: $\int\limits_{\partial D} \omega = \int\limits_0^{2\pi} \lambda^*\omega = \int\limits_0^{2\pi} (-18\sin^2(t) - 45\cos^2(t))dt = -63\pi$.

Für Verallgemeinerungen dieser Sätze sei auf die weiterführende Literatur verwiesen.