Beschreibung eines Kreises in einer beliebigen bewegten Ebene

In manchen Anwendungen soll in bewegten Ebenen etwas geometrisch beschrieben werden. Da dieses relativ einfach ist, soll hier ein Kreis in einer sich bewegenden Ebene angegeben werden. Dazu wird das kanonische Skalarprodukt verwendet.

Zunächst wird zu einem Weg, der durch Bewegung eines Punktes entsteht, eine zu dem Tangentenvektor des Weges, in dem bewegten Punkt eine orthogonale Ebene angegeben. Die erzeugenden Vektoren der Ebene werden orthonormalisiert und in den sich bewegenden Punkt verschoben. Der Kreis ist leicht zu beschreiben. Der Focus liegt hier auf einer möglichst einfachen Beschreibung.

Es sei $j(t) := \left(j_1(t), j_2(t), j_3(t)\right)$ ein Weg im dreidimensionalen Raum in Richtung $j'(t) := \left(j_1'(t) \quad j_2'(t) \quad j_3'(t)\right)^T$. Die Ebene senkrecht zu dem Richtungsvektor lautet

$$E(t) := \left\langle \left(-j_2'(t), j_1'(t), 0\right)^T, \left(0, -j_3'(t), j_2'(t)\right)^T \right\rangle.$$

Zwei orthonormale Vektoren in der Ebene lauten

$$E(t) = \left\langle \frac{\left(-j_2'(t), j_1'(t), 0\right)^T}{\sqrt{\left(j_1'(t)\right)^2 + \left(j_2'(t)\right)^2}}, \frac{\left(-j_1'(t)\, j_3'(t), -j_2'(t)\, j_3'(t), \left(j_1'(t)\right)^2 + \left(j_2'(t)\right)^2\right)^T}{\sqrt{\left(j_1'(t)\, j_3'(t)\right)^2 + \left(j_2'(t)\, j_3'(t)\right)^2 + \left(\left(j_1'(t)\right)^2 + \left(j_2'(t)\right)^2\right)^2}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\left(-j_2'(t), j_1'(t), 0\right)^T}{\sqrt{\left(j_1'(t)\right)^2 + \left(j_2'(t)\right)^2}}, \frac{\left(-j_1'(t)\, j_3'(t), -j_2'(t)\, j_3'(t), \left(j_1'(t)\right)^2 + \left(j_2'(t)\right)^2\right)^T}{\sqrt{\left(\left(j_1'(t)\right)^2 + \left(j_2'(t)\right)^2\right)\left(\left(j_1'(t)\right)^2 + \left(j_2'(t)\right)^2 + \left(j_3'(t)\right)^2\right)^2}} \right\rangle$$

Setzen wir noch

$$n_1(t) := \frac{\left(-j_2'(t), j_1'(t), 0\right)^T}{\sqrt{\left(j_1'(t)\right)^2 + \left(j_2'(t)\right)^2}} \text{ und } n_2(t) := \frac{\left(-j_1'(t)\, j_3'(t), -j_2'(t)\, j_3'(t), \left(j_1'(t)\right)^2 + \left(j_2'(t)\right)^2\right)^T}{\sqrt{\left(\left(j_1'(t)\right)^2 + \left(j_2'(t)\right)^2\right)\left(\left(j_1'(t)\right)^2 + \left(j_2'(t)\right)^2 + \left(j_3'(t)\right)^2\right)^2}}.$$

Nun verschieben wir die Ebene mit dem Vektor $j(t) := \left(j_1(t) \quad j_2(t) \quad j_3(t)\right)^T$ in den Punkt $j(t) = \left(j_1(t), j_2(t), j_3(t)\right)$. Die verschobene Ebene lautet

$$E\left(j(t)\right) = \left(j_1(t) \quad j_2(t) \quad j_3(t)\right)^T + \left\langle n_1(t), n_2(t)\right\rangle.$$

Der Kreis k mit Radius r um den Punkt $j(t)$ in der Ebene kann wie folgt beschrieben werden. Es sei $\xi(s)$ in Bogenmaß mit Parameter $s \in \mathbb{R}$ angegeben. Für den Kreis k zum Zeitpunkt t gilt

$$k_t(s) := \left(j_1(t) \quad j_2(t) \quad j_3(t)\right)^T + n_1(t)\, r \cdot \cos\left(\xi(s)\right) + n_2(t)\, r \cdot \sin\left(\xi(s)\right).$$

Wir prüfen noch auf die Richtigkeit der Aussage. Dazu ist $k_t(s)$ der „Ortsvektor" des Kreises, also der Vektor, der auf einen Punkt des Kreises zeigt. Der Vektor $\left(j_1(t) \quad j_2(t) \quad j_3(t)\right)^T$

zeigt auf den Mittelpunkt $\left(j_1(t), j_2(t), j_3(t)\right)$ des Kreises. Folglich ist vom Ortsvektor der Vektor zum Mittelpunktes zu subtrahieren, um davon das Skalarprodukt zu bilden. Zu beachten sind dabei $\left(n_1(t)\right)^2 = \left(n_2(t)\right)^2 = 1$ und $n_1(t) \perp n_2(t) \Leftrightarrow n_1(t) \cdot n_2(t) = 0$.

$$\begin{aligned}
\left(k_t(s) - \left(j_1(t) \quad j_2(t) \quad j_3(t)\right)^T\right)^2 &= \left(n_1(t)\, r \cdot \cos\left(\xi(s)\right) + n_2(t)\, r \cdot \sin\left(\xi(s)\right)\right)^2 \\
&= \left(n_1(t)\, r \cdot \cos\left(\xi(s)\right)\right)^2 + \left(n_2(t)\, r \cdot \sin\left(\xi(s)\right)\right)^2,\ n_1(t) \perp n_2(t) \\
&= \left(n_1(t)\right)^2 \cdot r^2 \cdot \cos^2\left(\xi(s)\right) + \left(n_2(t)\right)^2 \cdot r^2 \cdot \sin^2\left(\xi(s)\right) \\
&= r^2 \cdot \left(\cos^2\left(\xi(s)\right) + \sin^2\left(\xi(s)\right)\right) \\
&= r^2
\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.