

Homologie und der Rang des Steinberg-Moduls in endlichen Geometrien

Dr. Gert Hillebrandt

1990

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Einleitung</i>	2
<i>1. Allgemeine geometrische Grundlagen</i>	7
<i>2. Homologie und Kohomologie in endlichen Geometrien</i>	17
<i>3. Die Steinberg-Moduln der sphärischen Gebäude</i>	31
<i>4. Der p-Rang von $(0,1)$-Matritzen</i>	35
<i>A. Partielle Lineare Räume</i>	37
<i>B. Partialgeometrien</i>	38
<i>C. Lineare Räume</i>	42
<i>5. Lineare Räume der Dimension drei</i>	45
<i>Literaturverzeichnis</i>	54

Einleitung

Homologie und Kohomologie haben ihren Ursprung in der Topologie. Hierdurch werden topologische Fragen mit algebraischen Methoden beantwortet. Dem topologischen Raum werden Moduln zugeordnet, die Invarianten (Betti-Zahlen, Torsionskoeffizienten) des topologischen Raumes darstellen.

Eine wichtige Konstruktion zur Berechnung von Homologie- und Kohomologiemoduln ist die der abstrakten simplizialen Komplexe. (Hilton, Wylie [20])

Ein **abstrakter simplizialer Komplex** \mathbf{K} besteht aus einer Menge \mathbf{E} von **Ecken** und aus einer Menge $S \subseteq 2^{\mathbf{E}} \setminus \emptyset$ von **Simplexen**, für die folgende Eigenschaften gelten:

1. Jede aus einer Ecke bestehende Menge ist ein Simplex.
2. Jedes Simplex ist eine endliche Menge.
3. Jede nichtleere Teilmenge eines Simplex ist ein Simplex.

Ist die Anzahl der Ecken in einem Simplex gleich k , so heißt die Zahl $k-1$ die Dimension des Simplex. Ein Teilsimplex der Dimension r heißt r -te Seite des darüberliegenden Simplexes.

Dazu ein Beispiel.

Wir betrachten nun einen affinen Raum der Dimension n über einem endlichen Körper. Eine Fahne des affinen Raumes ist eine aufsteigende Folge $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_l$ von affinen Teilräumen der Dimension $\dim_k U_i < n$. Definieren wir jeden Punkt als Teilraum der Dimension null, so bilden die echten affinen Teilräume die Eckenmenge eines abstrakten simplizialen Komplexes. Jede Fahne ist dann ein abstraktes Simplex. Dieser simplizialer Komplex hat eine zusätzliche Eigenschaft. Wir können die Ecken des Komplexes anhand der Dimension unterscheiden. Dies führt zum Begriff des Typs. Die Ecke U ist vom Typ i , wenn $\dim U = i-1$ ist. Man kann auch sagen, dass jede Ecke gefärbt ist und ein Simplex aus unterschiedlich gefärbten Ecken besteht.

Dies führt zur Verallgemeinerung von Geometrien, der Theorie der geometrischen Komplexe, die wohl Tits [32] zu verdanken ist.

Wird nun die Inklusion der affinen Teilräume durch eine Inzidenzrelation ersetzt und die Eckenmenge in disjunkte geometrische Typen (Punkte, Geraden, Ebenen, etc.) eingeteilt, so erhalten wir die Definition einer Semigeometrie im Sinne von Buekenhout [5].

Eine **Semigeometrie** $\Gamma := (S; I; t)$ über einer Menge J besteht aus einer Menge S , einer surjektiven Abbildung $t: S \rightarrow J$ und einer binären symmetrischen Relation I auf S mit folgender Bedingung:

$$\text{Für jedes } j \in J \text{ ist } I|_{t^{-1}(j)} \times t^{-1}(j) = \text{Id, die Identität.}$$

Paarweise inzidierende Elemente werden zu einer Menge zusammengefasst und bilden eine Fahne (Simplex). Einer Semigeometrie kann insbesondere ein abstrakter simplizialer Komplex (Fahnenkomplex) zugeordnet werden. (Tits [33])

Mit jeder Semigeometrie ist der Inzidenzgraph verbunden. Die Elemente der Semigeometrie bilden die Ecken des Inzidenzgraphen. Je zwei Ecken sind verbunden, wenn sie miteinander inzidieren. Dieser Inzidenzgraph kann nun in einen affinen Raum eingebettet werden, so dass jede Fahne auf ein Simplex des affinen Raumes abgebildet wird (Hilton, Wylie [20, 1.9.6]). Diese Zuordnung heißt geometrische Realisierung des abstrakten simplizialen Komplexes, hier des Inzidenzgraphen.

Es sei bemerkt, dass es sich hierbei nicht um die Realisierung der Semigeometrie handelt. Dies erkennt man unschwer am Beispiel des affinen Raumes, da er selbst die Realisierung der Semigeometrie ist. Ein Dreieck als Semigeometrie besitzt als geometrische Realisierung des Inzidenzgraphen ein Sechseck.

Am Beispiel des affinen Raumes der Dimension n erkennt man, dass zu jeder Fahne ein Teilraum der Dimension $n-1$ existiert, der alle affinen Teilräume dieser Fahne umfasst. Diese Eigenschaft hat eine Semigeometrie im allgemeinen nicht. Dies führt zum Begriff der Geometrie [5].

Eine Semigeometrie $\Gamma := (S; I; t)$ über einer Menge J heißt **Geometrie**, wenn zusätzlich gilt:

Inzidieren die Elemente einer Teilmenge $L \subseteq S$ paarweise, so existiert für jedes $j \in J$ wenigstens ein $x \in t^{-1}(j)$, das mit jedem $l \in L$ inzidiert.

Ist das Bild einer Fahne unter t gleich J , so heißt die Fahne **maximal** oder eine **Kammer**. Folglich liegt jede Fahne einer Geometrie in wenigstens einer Kammer. Die Anzahl der Elemente einer Fahne heißt der **Rang** der Fahne. Gibt es eine Bijektion von J auf eine Teilmenge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} , so wird J mit $\{1, 2, \dots, |J|\}$ identifiziert ($|J| = \infty$ ist zugelassen).

In dieser Arbeit werden nur Geometrien über $J := \mathbb{N}_n := \{1, 2, \dots, n\}$ betrachtet.

Liegt jede Fahne vom Rang $n-1$ in endlich vielen Kammern, so heißt die Geometrie **lokal-endlich**.

Mit jeder lokal-endlichen Geometrie Γ vom Rang n ist eine Algebra $\mathcal{H}_c(\Gamma)$ über dem Körper der komplexen Zahlen wie folgt definiert (Ott [25]):

Es sei V der durch die Kammern erzeugte \mathbb{C} -Modul, auch Standardmodul genannt. Für jedes $1 \leq i \leq n$ sei $\sigma_i(F) := \sum_{E \sim_i F} E$ die Summe über alle von F verschiedenen Kammern, die sich um genau ein Element vom Typ i unterscheiden. Dann ist σ_i ein Endomorphismus des Standardmoduls. Die Endomorphismen erzeugen die Algebra.

Sie heißt die **Hecke-Algebra** der Geometrie Γ . Insbesondere tritt in der Darstellung der Hecke-Algebra über dem Körper der komplexen Zahlen der **Steinberg-Modul**

$$\mathbf{st}_k := \{c \in V \mid \sigma_i(c) = -c \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_n\},$$

als irreduzibler Untermodul des Standardmoduls auf.

Der Steinberg-Modul hat seine ursprüngliche Bedeutung in der Homologie.

Vermöge des zugeordneten Fahnenkomplexes der Geometrie ist eine Homologietheorie definiert (Hilton, Wylie [20, 2.]). Eine wichtige Konstruktion zur Berechnung von Homologie- und Kohomologiemoduln ist die der abstrakten simplizialen Komplexe (Hilton, Wylie [20]).

Die Bedeutung der Homologiemoduln für endliche Gruppen G mit BN-Paaren vom Rang $\ell \geq 2$ erkannte Solomon [30] in Curtis' Arbeit [8] in der Beschreibung des Steinberg-Charakters \mathbf{st}_G . Insbesondere finden wir in [30, Theorem 2]

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}_{\ell-1}^{\mathbb{Q}} = \mathbf{st}_G(1),$$

wobei 1 das Einselement der Gruppe G und \mathbb{Q} der Körper der rationalen Zahlen ist.

Aus dem von Solomon angegebenen simplizialen Komplex einer Gruppe mit BN-Paar kann nun eine Geometrie konstruiert werden (Tits [32]), auf der diese Gruppe dann als

Automorphismengruppe operiert. Umgekehrt stimmt der Fahnenkomplex dieser Geometrie mit dem abstrakten simplizialen Komplex überein, der von Solomon aus der Gruppe mit BN-Paar konstruiert wurde.

In der Arbeit von Curtis, Iwahori und Kilmoyer [11] und unabhängig in Garland [15] scheint zum erstenmal der Zusammenhang zur Hecke-Algebra von Gruppen mit BN-Paaren aufzutauchen.

Durch [11] und [25] wissen wir, dass die Hecke-Algebra einer Gruppe mit BN-Paar isomorph zur Hecke-Algebra der assoziierten Geometrie ist, da die definierenden Relationen übereinstimmen. Es stellt sich daher die Frage nach einem natürlichen Zusammenhang zwischen dem Steinberg-Modul $\mathcal{S}t_R$ und dem Homologiemodul $\mathcal{H}_{n-1}^R(\Gamma)$ einer beliebigen Geometrie vom Rang n , denn für Gruppen mit BN-Paaren stimmen diese für $R = \mathbb{Q}$ überein [30]. Wir zeigen, dass dies kein Zufall ist.

Die geometrischen Grundlagen hierzu werden im ersten Teil der Arbeit bereitgestellt.

Im Gegensatz zu [20] und [31] betrachten wir im zweiten Teil dieser Arbeit nur geordnete, anstatt orientierte Fahnen, da es aus Sicht der Geometrie wenig sinnvoll erscheint, Orientierungen und kohärente Orientierungen von Fahnen in die Definition einzubeziehen, um eine Homologietheorie zu erhalten (Hilton, Stammbach [19; IV, 1.]). Darüber hinaus wird durch geordnete Fahnen die Darstellung sogar vereinfacht. Die Homologiemoduln eines geordneten und eines orientierten Fahnenkomplexes sind aber in jeder Dimension isomorph.

Homologie- und Kohomologiemoduln von geordneten Fahnenkomplexen werden im zweiten Teil definiert und untersucht.

Der Rang des Homologie- beziehungsweise Kohomologiemoduls der kleinsten Dimension misst bekanntlich die Anzahl der schwach zusammenhängenden Komponenten der Geometrie (Hilton, Wylie [20, 2.4]).

Der abstrakte simpliziale Komplex einer dünnen Geometrie ist eine Pseudomannigfaltigkeit ohne Rand. (Spanier [31, 3.8]).

Der Homologiemodul des größten Ranges wird im Fall einer dünnen Geometrie durch einen Zyklus erzeugt, der durch die Geometrie selbst induziert wird, falls die Geometrie orientierbar ist oder die Charakteristik des Ringes zwei beträgt. Existieren Nullteiler $r \in R$, im Ring R mit $2r = 0$, so wird der Homologiemodul durch Zyklen erzeugt, die zu den Nullteilern r korrespondieren. (vgl. Spanier [31, 4. E.2])

Der Kohomologiemodul der größten Dimension wird im Fall einer dünnen Geometrie von einem Element erzeugt, falls $1+1$ im Ring keine Einheit oder die Geometrie orientierbar ist. Hier ist jede Kammer ein Repräsentant.

Im allgemeinen Fall stellen wir zuerst den Zusammenhang zwischen dem Steinberg-Modul und dem Homologiemodul der größten Dimension her. Hierzu ersetzen wir in der Hecke-Algebra einer Geometrie vom Rang n den Körper der komplexen Zahlen durch einen beliebigen kommutativen Ring mit Einselement und betrachten den durch die geordneten Kammern erzeugten freien R -Modul C_{n-1} als Darstellungsmodul. Ferner definieren wir den Untermodul

$$\mathcal{S}t_k := \{c \in C_{n-1} \mid \sigma_i(c) = -c \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_n\}$$

als Steinberg-Modul der Geometrie. Andererseits ist der Homologiemodul

$$\mathcal{H}_{n-1}^R(\Gamma) = \ker(\partial_{n-1})$$

nach Definition ein Untermodul von C_{n-1} .

Mit dieser Verallgemeinerung gilt für eine Geometrie Γ vom Rang n :

$$\mathcal{H}_{n-1}^R(\Gamma) = St.$$

Im allgemeinen geht hierbei die Irreduzibilität der Steinberg-Darstellung verloren [7].

Mit Hilfe des Hopf-Spur-Theorems folgt nun sofort, dass in der Theorie der ungerichteten Graphen der Rang des Steinberg-Moduls mit dem Rang der Kantenzuggruppe identisch ist. Die Kantenzuggruppe ist die Fundamentalgruppe der Graphentheorie.

Der Kohomologiemodul der größten Dimension ist nicht so einfach zu charakterisieren. Nach dem universellen Koeffizientensatz der Kohomologie stimmen Homologie und Kohomologie über einem Körper der Charakteristik Null überein. Jedoch gilt der universelle Koeffizientensatz nur für Hauptidealringe! Trotzdem existiert kein natürlicher Isomorphismus zwischen Homologie und Kohomologie. Dazu sei ein gewöhnliches Dreieck betrachtet. Dieses Dreieck besitzt sechs Kammern und definiert einen Zyklus c über dem Körper \mathbb{Z}_2 . Der Steinberg-Modul ist also eindimensional. Dieser Zyklus, aufgefasst als Kozyklus, liegt sicher im Kern des zweiten Korandes. Er liegt aber auch im Bild des ersten Korandes. Folglich liefert es im Kohomologiemodul die Klasse null. Es ist daher notwendig, die Kohomologiemoduln über beliebige kommutative Ringe getrennt zu bestimmen.

Als Anwendung werden im dritten Teil Basen der Steinberg-Moduln sphärischer Gebäude bestimmt. Hier wird ein von Solomon unabhängiger kombinatorischer Beweis gegeben [16]:

Eine Basis wird durch die Apartments des Gebäudes induziert, die eine fest gewählte Kammer gemeinsam haben.

Dies verallgemeinert einen Teil des 1. Theorems in Solomons Aussage [30]. Einen Beweis für Geometrien, der sich auf Solomon stützt, findet man in Ronan [28].

Als einfache Folgerung ergibt sich:

Besitzt die Geometrie eine Automorphismengruppe mit einem BN-Paar, so kann der Rang sofort durch die Untergruppe B und durch das längste Element der Weylgruppe angegeben werden, da die Untergruppe B als Permutationsgruppe auf dem Steinberg-Modul mit der angegebenen Basis operiert. Hierzu vergleiche man auch [8].

Der Hauptteil dieser Arbeit ist die Untersuchung des p -Ranges von $(0,1)$ -Matrizen im vierten Teil. Hier beschränken wir uns auf $(0,1)$ -Matrizen A, B mit $AA^t = D + B$, wobei D eine Diagonalmatrix und A^t die zu A transponierte Matrix ist. Diese $(0,1)$ -Matrizen werden durch die Inzidenzabbildung definiert und liefern einen Code, wobei die Dimension des Codes über einem endlichen Körper durch den Rang der $(0,1)$ -Matrix gegeben ist. Daher liegt hier ein besonderes Interesse. Durch die genaue Kenntnis des p -Ranges kann das Bruck-Ryser-Theorem für endliche projektive Ebenen bewiesen werden [27]: Ist $v = n^2 + n + 1$ die Anzahl der Punkte, p eine Primzahl mit $p | n$ und $p^2 \nmid n$, so ist der p -Rang $\frac{v+1}{2}$. Eine weitere Anwendung durch Kenntnis des p -Ranges findet man in [24].

In diesem Teil beschränken wir uns auf partielle lineare Räume. Sie sind dadurch ausgezeichnet, dass durch zwei Punkte höchstens eine Gerade geht.

Folgendes Theorem wird bewiesen:

Es sei Γ ein partieller linearer Raum. Es sei k ein Körper und M die Inzidenzmatrix von Γ , dann ist

$$\text{rg}_k(M) \geq \sqrt{\dim_k(\mathcal{S}\mathcal{t})}.$$

In linearen Räumen sind je zwei Punkte durch genau eine Gerade verbunden. Hier gebe ich eine R -Basis des Steinberg-Moduls für jeden kommutativen Ring mit Einselement an.

Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Es sei Γ ein linearer Raum mit v Punkten. Dann gilt genauer:

$$\dim_k(\mathcal{S}\mathcal{t}) = (v - |a|)(|a| - 1) + \sum_{j \in J} (|a_j| - 1),$$

wobei a irgendeine fest gewählte Gerade und $\{a_j | j \in J\}$ die Menge aller Geraden ist, die Gerade a nicht treffen.

Eine Basis wird durch n -Ecke induziert, die eine feste Kammer $\{A, a\}$ gemeinsam haben:

1. Durch alle Dreiecke, die $\{A, a\}$ enthalten.
2. Durch solche Vierecke, die wie folgt gebildet werden: Zu jeder Geraden a_j , die a nicht trifft, wird ein fester Punkt auf a_j gewählt. Zu jedem anderen Punkt auf a_j wird dann genau ein Viereck gewählt, das auch die Kammer $\{A, a\}$ enthält.

Es sei bemerkt, dass in speziellen Fällen der Rang der Inzidenzmatrix M genau angegeben werden kann.

Eine erste Abschätzung dieser Art ist für projektive Ebenen von E. S. Lander [23] gegeben worden:

$$\text{rg}_k(M) \geq 3n - 2,$$

wobei n die Ordnung der projektiven Ebene ist.

Dieses Ergebnis wurde durch A.A. Bruen und U. Ott [3] auf lineare Räume verallgemeinert und verbessert:

$$(\text{rg}_k(M) - 1)^2 \geq (v - |a|)(|a| - 1),$$

wobei v die Anzahl der Punkte und $|a|$ die Anzahl der Punkte auf der Geraden a bezeichnet.

Im letzten Abschnitt werden lineare Räume der Dimension drei untersucht. Diese Räume werden meistens als Inzidenzstrukturen oder Designs untersucht [1], [20]. Diese sind jedoch nur Geometrien vom Rang zwei. In diese Klasse fallen zum Beispiel erweiterte projektive Ebenen, Möbius-Ebenen und lokal projektive Räume. Bei der Untersuchung dieser Geometrien mit Parametern ergibt sich ein Polynom, aus dem die Nichtexistenz einiger linearer Räume der Dimension drei folgt.

Für lokal projektive Geometrien zeigt sich, dass zu jeder Geraden in einer Ebene eine Parallelklasse existiert, die eine Partition der Punkte in der Ebene bestimmt. Hat die Geometrie insbesondere Parameter X, Y, Y , und ist $Y > X$, so gilt die Kongruenz $Y \equiv 0 \pmod{X+1}$. Hieraus folgt unter anderem für $X = 1$, dass Y nur die Werte 1, 2, 4, 10 annehmen kann (vgl. [14]).

Als letztes gebe ich eine Basis des Steinberg-Moduls der linearen Räume der Dimension drei an.

In allen Anwendungen wird außerdem für jede Geometrie Γ vom Rang n ein minimales Erzeugendensystem für den Kohomologiemodul $\mathcal{Z}_R^{n-1}(\Gamma)$ bestimmt.

1. Allgemeine geometrische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die geometrischen Grundlagen bereitgestellt, die in der gesamten Arbeit benötigt werden. Ferner soll an dieser Stelle die folgende Voraussetzung gemacht werden, die überall gelten soll, obwohl die Definitionen noch nicht vollständig vorliegen.

Alle Geometrien sind endlich und streng zusammenhängend. Alle Ringe sind kommutativ und besitzen ein Einselement.

Definition 1.1: [5], [26], [33]

Eine **Geometrie** Γ **über einer Menge** J besteht aus einer Menge S , einer surjektiven Abbildung $t: S \rightarrow J$ und einer binären symmetrischen Relation I auf S mit folgenden Bedingungen:

1. Für jedes $j \in J$ ist $I|_{t^{-1}(j) \times t^{-1}(j)}$ die Identität.
2. Inzidieren die Elemente einer Teilmenge $L \subseteq S$ paarweise, so existiert für jedes $j \in J$ wenigstens ein $x \in t^{-1}(j)$ das mit jedem $l \in L$ inzidiert.

Da wir nur endliche Geometrien studieren, setzen wir S und J als endlich voraus und identifizieren J mit den ersten natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_n := \{1, \dots, n\}$.

Bezeichnungen: [5], [26], [33]

Die Elemente in J heißen **Typen**. Die Faser $S_j := t^{-1}(j)$, wobei $j \in J$ enthält die **Elemente vom Typ** j . Ferner heißt t **Typenabbildung** und I die **Inzidenzrelation der Geometrie**. Für die Geometrie Γ schreiben wir auch $\Gamma = (S, t, I)$ oder $\Gamma = (S_1, \dots, S_n, I)$.

Wir sagen x **inzidiert mit** y , wenn $(x, y) \in I$ und bezeichnen dies auch mit $x I y$.

Die Elemente vom Typ 1, 2, 3 nennen wir **Punkte, Geraden, Ebenen**.

Die in 1.1 2. definierten Teilmengen heißen Fahnen. Ist die Einschränkung von t auf eine Fahne eine Bijektion auf J , so heißt die **Fahne maximal** oder eine **Kammer**.

Der **Typ einer Fahne** F ist definiert durch $t(F)$. Entsprechend ist der **Kotyp einer Fahne** F durch

$$\text{kot}(F) := J \setminus t(F)$$

definiert.

Die Kardinalzahl einer Fahne F heißt der **Rang**, in Zeichen $\text{rg}(F)$. Entsprechend ist der **Korang einer Fahne** F durch

$$\text{korg}(F) + \text{rg}(F) = |J|$$

definiert, wobei $|J|$ die Kardinalzahl von J ist.

Die Menge aller Fahnen vom Rang k bezeichnen wir mit $\mathbf{F}_k(\Gamma)$. Geht aus dem Zusammenhang klar hervor, um welche Geometrie es sich handelt, so bezeichnen wir diese Menge kurz mit \mathbf{F}_k . Ferner identifizieren wir die Mengen $\mathbf{F}_1 = S$.

Wie in der Einleitung bereits bemerkt, kann jeder Geometrie $\Gamma = (S, t, I)$ ihr Fahnenkomplex $\Delta(\Gamma) = (\mathbf{F}, t, U)$ zugeordnet werden, wobei \mathbf{F} die Vereinigung aller Fahnen ist (Tits [33]). Insbesondere ist einem Fahnenkomplex durch „Vergessen“ der Typen ein simplizialer Komplex untergeordnet.

Der **Rang einer Geometrie** Γ über \mathbb{N}_n ist definiert als die Zahl $\text{rg}(\Gamma) := n$. Eine Geometrie Γ über \mathbb{N}_n bezeichnen wir daher auch als **Geometrie vom Rang n** . Ist der Rang beliebig, so sprechen wir nur von der Geometrie Γ .

Definition 1.2: [5]

Es sei Γ eine Geometrie.

1. Zwei Fahnen A, B in Γ **inzidieren**, wenn ihre Vereinigung $A \cup B$ wieder eine Fahne ist.
2. Ist jede Fahne vom Korang eins in höchstens zwei Kammern enthalten, so heißt die Geometrie **semidünn**.
3. Ist jede Fahne vom Korang eins in genau zwei Kammern enthalten, so heißt die Geometrie **dünn**.
4. Ist jede Fahne vom Korang eins in mindestens zwei Kammern enthalten, so heißt die Geometrie **fest**.
5. Liegt jede Fahne vom Korang eins in wenigstens drei Kammern, so heißt sie **dick**.

Definition 1.3: [5]

Es seien Γ und Π Geometrien. Auf der disjunkten Vereinigung der Geometrien Γ und Π wird wie folgt eine Inzidenz definiert:

Jedes Element aus Γ ist inzident mit jedem Element aus Π .

Durch diese Inzidenz ist eine Geometrie definiert. Sie heißt die direkte Summe der Geometrien Γ und Π und wird mit

$$\Gamma \oplus \Pi$$

bezeichnet.

Definition 1.4: [5]

Es seien $\Gamma = (S, t_s, I_s)$ und $\Pi = (T, t_t, I_t)$ Geometrien. Ein **Morphismus** $f: \Gamma \rightarrow \Pi$ ist eine Abbildung

$$f: S \rightarrow T$$

die verschiedene inzidierende Elemente auf verschiedene inzidierende Elemente abbildet.

Die Einschränkung auf jede Fahne ist daher injektiv. Insbesondere induziert jeder Morphismus eine simpliziale Abbildung auf dem Fahnenkomplex. Es sei hier bemerkt, dass umgekehrt eine simpliziale Abbildung kein Morphismus des Fahnenkomplexes sein muss (Spanier [31, 3.1]), da die Einschränkung auf ein Simplex nicht injektiv sein muss.

Bleibt der Typ erhalten, $t_t(f(x)) = t_s(x)$, so heißt f ein **spezieller** oder **typenerhaltender** oder auch **t -Morphismus**.

Es folgen die üblichen Definitionen.

Definition 1.5:

Es seien Γ und Π Geometrien. Es sei $f: \Gamma \rightarrow \Pi$ ein Morphismus.

1. Wenn für jede Geometrie Σ und für alle Morphismen $g, h: \Pi \rightarrow \Sigma$ mit $gf = hf$ die Gleichheit $g = h$ folgt, so heißt f ein **Epimorphismus**.
2. Wenn für jede Geometrie Σ und für alle Morphismen $g, h: \Sigma \rightarrow \Gamma$ mit $fg = fh$ die Gleichheit $g = h$ folgt, so heißt f ein **Monomorphismus**.
3. Existiert ein Morphismus $g: \Pi \rightarrow \Gamma$ mit $gf = 1_\Gamma$ und $fg = 1_\Pi$, dann heißt f ein **Isomorphismus**.
4. Ein Morphismus $f: \Gamma \rightarrow \Gamma$ heißt **Endomorphismus**.
5. Ein Endomorphismus f , der zugleich ein Isomorphismus ist, heißt **Automorphismus**.

Proposition 1.6:

Es seien Γ , Π und Σ Geometrien. Es seien $f: \Gamma \rightarrow \Pi$ und $g: \Pi \rightarrow \Sigma$ Morphismen.

1. Sind f und g Epimorphismen, dann ist gf ein Epimorphismus.
2. Sind f und g Monomorphismen, dann ist gf ein Monomorphismus.
3. Sind f und g Isomorphismen, dann ist gf ein Isomorphismus.
4. Ist gf ein Epimorphismus, dann ist g ein Epimorphismus.
5. Ist gf ein Monomorphismus, dann ist f ein Monomorphismus.
6. Ist gf ein Isomorphismus, dann ist g genau dann ein Isomorphismus, wenn f ein Isomorphismus ist.
7. Ist f ein Isomorphismus, dann ist f ein Epi- und Monomorphismus.
8. Genau dann ist f ein Monomorphismus, wenn f injektiv ist.
9. Genau dann ist f ein Epimorphismus, wenn f surjektiv ist.

Definition 1.7: [5]

Es sei $\Gamma = (S, t, I)$ eine Geometrie über J .

1. Es sei $S' \subseteq S$, $t' := t|_{S'}$ und $I' := I|_{S' \times S'}$. Ferner sei die Bedingung 2. der Definition 1.1 für S', t', I' und $J' := t(S')$ erfüllt. Dann ist

$$\Gamma' = (S', t', I')$$

eine Geometrie über J' und heißt **Teilgeometrie von Γ** .

2. Es sei F eine Fahne in Γ und $S_F := \{x \in S \mid x \notin F, xIF\}$. Bezeichnen I_F und t_F die Einschränkungen von I und t auf S_F , dann ist

$$\Gamma_F := (S_F, t_F, I_F)$$

eine Teilgeometrie über $J_F := J \setminus t(F)$.

Sie heißt **die in der Fahne F abgeleitete Geometrie** und ist vom Rang

$$\text{rg}(\Gamma_F) + \text{rg}(F) = \text{rg}(\Gamma).$$

3. Es sei $K \subseteq J$, $S^K := t^{-1}(K)$ und I^K bzw. t^K die Einschränkung von I bzw. t auf S^K . Dann ist

$$\Gamma^K := (S^K, t^K, I^K)$$

eine Teilgeometrie von Γ und heißt **die Verstümmelung von Γ über K** .

4. Ein Morphismus $f: \Gamma \rightarrow \Pi$ heißt **Homomorphismus**, wenn für jede Fahne F in Γ das Bild $f(\Gamma_F)$ der in der Fahne F abgeleiteten Geometrie eine Teilgeometrie von Π ist.

Lemma 1.8: [5]

Es seien Γ und Π . Es sei Γ^K die Verstümmelung von Γ über K und $f: \Gamma \rightarrow \Pi$ ein Morphismus.

1. Für jede Fahne F in Γ^K gilt:

$$(\Gamma^K)_F = (\Gamma_F)^K.$$

2. Ist f ein Homomorphismus, dann gilt für jede Fahne F in Γ die folgende Inklusion der Teilgeometrien:

$$f(\Gamma_F) \subseteq f(\Gamma)_{f(F)} \subseteq \Pi_{f(F)}.$$

3. Ist E eine Fahne in Γ_F , dann ist $E \cup F$ eine Fahne in Γ . Insbesondere ist

$$(\Gamma_F)_E = \Gamma_{E \cup F} = (\Gamma_E)_F.$$

Proposition 1.9: [5]

Es sei Γ eine Geometrie.

1. Γ ist genau dann semidünn, wenn für jede Fahne F vom Korang zwei die in der Fahne F abgeleitete Geometrie Γ_F semidünn ist.
2. Γ ist genau dann dünn, wenn für jede Fahne F vom Korang zwei die in der Fahne F abgeleitete Geometrie Γ_F dünn ist.
3. Γ ist genau dann fest, wenn für jede Fahne F vom Korang zwei die in der Fahne F abgeleitete Geometrie Γ_F fest ist.
4. Γ ist genau dann dick, wenn für jede Fahne F vom Korang zwei die in der Fahne F abgeleitete Geometrie Γ_F dick ist.

Definition 1.10: [32]

Zwei Kammern A und B heißen **benachbart**, wenn sie sich um höchstens ein Element unterscheiden. Sie heißen **i -benachbart**, $i \in \mathbb{N}_n$, wenn sie sich um höchstens ein Element vom Type i unterscheiden.

Bezeichnungen:

Für jedes i definiert die i -Nachbarschaft eine Äquivalenzrelation \sim_i . Zwei Kammern A und B gehören zur i -ten Äquivalenzklasse, wenn $A \sim_i B$. Die Klasse bezeichnen wir mit $[A]_i$.

Eine Folge benachbarter Kammern heißt eine **Galerie**. Die Galerie heißt **einfach**, wenn die benachbarten Kammern verschieden sind.

Ist

$$\mathbf{G}: E_0 \underset{j_1}{\sim} E_1 \underset{j_2}{\sim} \cdots \underset{j_{k-1}}{\sim} E_{k-1} \underset{j_k}{\sim} E_k$$

eine Galerie in einer Geometrie Γ über J , so heißt

$$f_{\mathbf{G}} = j_1 j_2 \cdots j_k$$

der **Typ der Galerie** und ist ein **Wort** im freien Monoid $F(J)$ über J . Die Zahl k heißt die **Länge** der Galerie \mathbf{G} beziehungsweise des Typs $f_{\mathbf{G}}$, in Zeichen $\ell(\mathbf{G}) = \ell(f_{\mathbf{G}})$. Die konstante Galerie hat die Länge 0.

Die Galerien

$$\mathbf{G}: E_0 \underset{j_1}{\sim} E_1 \underset{j_2}{\sim} \cdots \underset{j_{k-1}}{\sim} E_{k-1} \underset{j_k}{\sim} E_k \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^-: E_k \underset{j_k}{\sim} E_{k-1} \underset{j_{k-1}}{\sim} \cdots \underset{j_2}{\sim} E_1 \underset{j_1}{\sim} E_0$$

heißen die zueinander **inversen Galerien**. Entsprechend sind

$$f_{\mathbf{G}} = j_1 j_2 \cdots j_k \quad \text{und} \quad f_{\mathbf{G}^-} = j_k j_{k-1} \cdots j_1$$

zueinander **inverse Typen**. Insbesondere ist also \mathbf{H}^- die zu \mathbf{H} inverse Galerie.

Sind

$$\mathbf{G}: E_0 \underset{j_1}{\sim} E_1 \underset{j_2}{\sim} \cdots \underset{j_{k-1}}{\sim} E_{k-1} \underset{j_k}{\sim} E_k \quad \text{und} \quad \mathbf{H}: E_k \underset{i_1}{\sim} E_{k+1} \underset{i_2}{\sim} \cdots \underset{i_l}{\sim} E_{k+l}$$

zwei Galerien, so ist die zusammengesetzte Galerie \mathbf{GH} definiert durch

$$\mathbf{GH}: E_0 \underset{j_1}{\sim} E_1 \underset{j_2}{\sim} \cdots \underset{j_{k-1}}{\sim} E_{k-1} \underset{j_k}{\sim} E_k \underset{i_1}{\sim} E_{k+1} \underset{i_2}{\sim} \cdots \underset{i_l}{\sim} E_{k+l}$$

Eine Geometrie heißt **zusammenhängend**, wenn je zwei Kammern durch eine Galerie verbunden sind.

Der **Abstand** zweier Kammern E, F ist definiert durch

$$d(E, F) := \inf \left\{ n \mid \mathbf{G}: E = E_0 \underset{j_1}{\sim} E_1 \underset{j_2}{\sim} \cdots \underset{j_{n-1}}{\sim} E_{n-1} \underset{j_n}{\sim} E_n = F; \text{ für alle Galerien von } E \text{ nach } F \right\}.$$

Der **Durchmesser** einer Geometrie Γ ist definiert durch

$$D(\Gamma) := \sup \{ d(E, F) \mid E, F \in \mathbf{F} \}, \text{ für alle Kammern in } \Gamma.$$

Eine Geometrie heißt **streng zusammenhängend**, wenn alle abgeleiteten Geometrien vom Rang größer oder gleich zwei zusammenhängend sind.

Eine Geometrie heißt **schwach zusammenhängend**, wenn je zwei Elemente der Geometrie durch eine Folge von Elementen verbunden werden können, in der aufeinanderfolgende Elemente inzidieren.

Definition 1.11: [33, 3.4]

Es sei Γ eine Geometrie über J . Es seien \mathbf{G} und \mathbf{H} zwei einfache Galerien, die eine gemeinsame Anfangs- und Endkammer besitzen.

G und H heißen *subelementar homotop*, wenn $G = H$ ist oder die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\ell(G) = \ell(H)$.
2. Die durch G und H induzierte Teilgeometrie ist ein dünnes $\ell(G)$ -Eck.

Sind die zusammengesetzten Galerien FGK , FHK definiert und sind G und H subelementar homotop, so heißen die Galerien FGK und FHK *elementar homotop*.

Zwei Galerien heißen *homotop*, wenn sie durch eine Folge elementar homotoper Galerien verbunden werden können.

Definition 1.12:

Eine Galerie heißt *reduziert*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

1. Alle zu G homotopen Galerien sind einfach.
2. In keiner zu G homotopen Galerie existiert eine Teilfolge HH^- .
3. Keine homotope Galerie enthält eine Teilgalerie vom Typ ii für alle $i \in J$.

Korollar 1.13:

1. Eine reduzierte Galerie ist einfach.
2. Zwischen zwei Kammern existiert stets eine reduzierte Galerie.

Beweis:

1. Jede Galerie ist zu sich selbst homotop. Die Aussage folgt aus Definition 1.12 1.
2. Besteht die Galerie aus einer Kammer, so ist nichts zu zeigen. Seien also A und B zwei verschiedene Kammern. Es sei G eine Galerie kürzester Länge die A mit B verbindet. Eine solche existiert, da die Geometrie zusammenhängend ist. Wäre G nicht reduziert, so fänden wir mit Definition 1.12 eine kürzere Galerie die A mit B verbindet.

Definition 1.14:

Es sei A eine Kammer in einer Geometrie Γ . Für jede Teilgeometrie Π von Γ sei $D(\Pi)$ der Durchmesser von Π .

1. Eine Kammer F hat den *dünnen Abstand* n zu A , wenn es eine streng zusammenhängende dünne Teilgeometrie Σ gibt, die A und F enthält, so dass der Abstand $d_\Sigma(A, F)$ in Σ gleich $n = D(\Sigma)$ und n mit diesen Eigenschaften minimal ist.
2. Eine Geometrie Γ heißt *dünn zusammenhängend* bezüglich einer Kammer A , wenn folgende Eigenschaften hat.

Es sei G eine reduzierte Galerie, die A mit der Kammer E verbindet.

Wenn E in einer streng zusammenhängenden dünnen Teilgeometrie Σ enthalten ist, dann kann Σ so gewählt werden, dass Σ die G enthält.

Das System aller dieser dünnen Teilgeometrien bezeichnen wir mit $Z_A(\Gamma)$ und heißt *dünnes Zusammenhangssystem der Geometrie Γ bezüglich der Kammer A* .

Definition 1.15: [33]

Ein *Coxeter-Diagramm* beziehungsweise eine *Coxeter-Matrix* ist eine symmetrische Abbildung

$$M : \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_\infty$$

mit $M(i, i) = 1$ und $M(i, j) = M(j, i) \geq 2$ für $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}_n$, wobei $\mathbb{N}_\infty := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Ein Coxeter-Diagramm wird meistens als **multipler Graph** mit \mathbb{N}_n als Eckenmenge dargestellt.

Zwei Ecken $i, j \in \mathbb{N}_n$ sind durch $M(i, j) - 2$ Kanten oder durch eine Kante mit der Belegung $M(i, j)$ verbunden. Dieser Graph besitzt keine Schleifen.

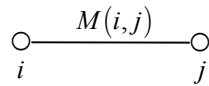
Wir sagen, M ist ein Coxeter-Diagramm über \mathbb{N}_n und setzen $J := \mathbb{N}_n$.

Definition 1.16: [33]

Eine Geometrie vom Rang zwei heißt ein **verallgemeinertes n -Eck**, wenn der Durchmesser n und die kleinste Länge einer nichtkonstanten geschlossenen Galerie ohne Wiederholung $2n$ beträgt.

Eine Geometrie Γ vom Rang n heißt **vom Typ M** , wenn für jede Fahne F vom Kotyp $\{i, j\}$ die in der Fahne F abgeleitete Geometrie Γ_F ein $M(i, j)$ -Eck ist.

Geometrien vom Typ M werden gern als Graph im Sinne von 1.15 dargestellt.



Wichtige Beispiele für Geometrien vom Typ M liefern die **Coxeter-Geometrien**.

Definition 1.17: [33]

Es sei M ein Coxeter-Diagramm über J . Es sei W eine Gruppe erzeugt durch die Teilmenge $\{r_j \mid j \in J\} \subset W$.

Die Gruppe W heißt **Coxeter-Gruppe vom Typ M** , wenn gilt:

Die Menge

$$\left\{ (r_i r_j)^{M(i, j)} = 1 \mid i, j \in J; M(i, j) \neq \infty \right\}$$

enthält einen vollständigen Satz von definierenden Relationen für W bezüglich der Menge der Erzeuger $R = \{r_j \mid j \in J\}$.

Das Paar (W, R) heißt ein **Coxeter-System**.

Proposition 1.18: [33]

Es sei $W = \langle r_j \mid j \in J \rangle$ eine Coxeter-Gruppe vom Typ M . Bezeichne W_i die durch $\{r_j \mid j \in J \setminus \{i\}\}$ erzeugte Untergruppe von W . Es sei $S_i := \{wW_i \mid w \in W\}$ die Menge der Elemente vom Typ i für $i \in J$. Die Inzidenzrelation sei definiert durch $wW_i I vW_k \Leftrightarrow wW_i \cap vW_k \neq \emptyset$. Dann ist $\Gamma(W) := (S_1, \dots, S_{|J|}; I)$ eine dünne Geometrie vom Typ M .

Definition 1.19: [33]

Es sei W eine Coxeter-Gruppe vom Typ M . Es sei $\Gamma(W)$ die in 1.18 definierte Geometrie. Eine zu $\Gamma(W)$ isomorphe Geometrie heißt **Coxeter-Geometrie vom Typ M** .

Lemma 1.20: [33]

Es sei W die Coxeter-Gruppe vom Typ M über J und $F(J)$ der freie Monoid über J . Dann existiert ein Monoidhomomorphismus

$$\Phi: \begin{cases} F(J) & \rightarrow & W \\ j_1 \cdots j_k & \mapsto & r_{j_1} \cdots r_{j_k}. \end{cases}$$

Das Bild von $f \in F(J)$ wird mit r_f bezeichnet. Das Wort $f \in F(J)$ heißt reduziert, wenn $\ell(f) = \ell(r_f)$.

Sind G und H elementar homotope Galerien in einer Geometrie Γ vom Typ M , so heißen auch die Typen f_G und f_H elementar homotop. In der Weyl-Gruppe vom Typ M gilt dann $r_{f_G} = r_{f_H}$.

Proposition 1.21: [33]

Es sei Γ eine Geometrie vom Typ M . Ist G eine Galerie vom Typ f , und ist f, f_1, \dots, f_k eine Folge elementar homotoper Wörter, dann existiert eine Folge elementar homotoper Galerien G, G_1, \dots, G_k mit $f_{G_j} = f_j$ für jedes $1 \leq j \leq k$.

Ist G reduziert, dann sind alle Galerien G_j reduziert, und die Folge der Galerien ist eindeutig.

Zwei reduzierte Wörter f und g mit $r_f = r_g$ sind homotop.

Man beachte den Unterschied zwischen einem Wort und einem Typ.

Wie man sieht, eignen sich Diagramme sehr gut zur Beschreibung von Geometrien. Nun möchte man sich nicht auf Geometrien vom Typ M beschränken. Eine weitere wichtige Klasse von Diagrammen ist von Buekenhout [4] und [5] eingeführt worden.

In dieser Arbeit wird die Klasse der partiellen linearen Räume untersucht. Als Spezialfälle betrachten wir die Klassen der Partialgeometrien und der linearen Räume.

Definition 1.22: [21]

Eine Geometrie Γ vom Rang zwei heißt ein *Partieller Linearer Raum*, wenn gilt:

- (*PLR1*) Zwei verschiedene Punkte sind durch höchstens eine Gerade verbunden.
- (*PLR2*) Die Geometrie ist fest.

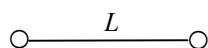
Die linearen Geometrien bilden eine Teilklasse der partiellen linearen Räume.

Definition 1.23: [4]

Ein *Linearer Raum* ist eine Geometrie vom Rang zwei mit folgenden Bedingungen:

- (*LR1*) Je zwei verschiedene Punkte sind durch genau eine Gerade verbunden.
- (*LR2*) Es gibt ein Dreieck.

Ein linearer Raum wird durch das Diagramm



gekennzeichnet. Wir bezeichnen deshalb den linearen Raum auch als Geometrie vom Typ L .

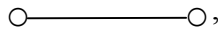
In der Klasse der linearen Räume sind wieder einige besonders ausgezeichnet.

Definition 1.24:

Ein linearer Raum heißt *projektive Ebene*, wenn gilt:

(PR) Je zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

Die projektive Ebene ist vom Typ



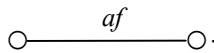
also ein verallgemeinertes Dreieck.

Definition 1.25:

Ein linearer Raum heißt affine Ebene, wenn gilt:

(AF) Durch jeden Punkt P , der nicht auf der Geraden a liegt, gibt es genau eine Gerade, die a nicht trifft.

Die affine Ebene ist vom Typ



Sind die Anzahl der Geraden durch jeden Punkt und die Anzahl der Punkte auf jeder Geraden konstant, so spricht man von Parametern der Geometrie. Genauer gilt:

Definition 1.26:

Eine Geometrie vom Rang n besitzt die *Parameter* X_1, \dots, X_n , wenn mit jeder Fahne F vom Kotyp i genau $X_i + 1$ Elemente vom Typ i inzidieren.

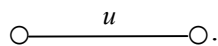
Definition 1.27:

Ein linearer Raum heißt *Unital*, wenn gilt:

(U1) Auf jeder Geraden liegen $X + 1$ Punkte.

(U2) Mit jedem Punkt inzidieren genau $X^2 - 1$ Geraden.

Ein Unital ist vom Typ

**Bemerkung:**

Unitale fand man zuerst als Konstruktionen in projektiven Ebenen [21]:

In einem Unital $\Gamma = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ sind die Punkte die absoluten Punkte und die Geraden die nichtabsoluten Geraden einer unitären Polarität σ der projektiven Ebene \mathbf{P} , also $\mathcal{P} := \{P \in \mathbf{P} \mid P I P^\sigma\}$ und $\mathcal{L} := \{g \in \mathbf{P} \mid g \not I g^\sigma\}$. Die Inzidenz I ist durch die Einschränkung gegeben. Für $X = 2$ ist ein Unital eine affine Ebene. Die Umkehrung ist auch richtig.

Eine andere wichtige Teilklasse der partiellen linearen Räume ist die der Partialgeometrien.

Definition 1.28:

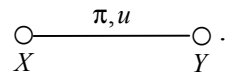
Ein partieller linearer Raum heißt *Partialgeometrie*, wenn gilt:

(PG1) Es existieren ein Punkt und eine Gerade, die nicht inzidieren.

(PG2) Durch jeden Punkt P , der nicht auf der Geraden a liegt, gibt es genau $u + 1$ Geraden, die a treffen.

Bemerkung 1.29:

Die hier angegebene Definition unterscheidet sich von denen in der Literatur durch fehlende Parameter. Besitzt die Partialgeometrie Parameter X, Y , so bezeichnen wir sie durch das Diagramm



Im Falle einer Partialgeometrie $\Gamma = (S_1, S_2, I)$ mit Parametern X, Y sind einige Geometrien besonders ausgezeichnet.

1. Setzen wir $u = 0$, so finden wir verallgemeinerte Vierecke.
2. Für $u = X - 1$ oder $u = Y - 1$ finden wir **Bruck-Netze**.
3. Ist $u = X$ oder $u = Y$, so erhalten wir $2 - (|S_1|, X + 1, 1)$ -Designs. Dazu gehören die linearen Räume, projektiven Räume mit $X = Y$, die affinen Ebenen $Y = X + 1$ und die Unitale $Y = X^2 - 1$.

Definition 1.30:

Eine Geometrie ist vom **Buekenhout-Tits-Typ**, wenn jede abgeleitete Geometrie vom Rang zwei entweder ein verallgemeinertes n -Eck, eine Partialgeometrie oder ein linearer Raum ist.

2. Homologie und Kohomologie in endlichen Geometrien

Es sei daran erinnert, dass alle Geometrien streng zusammenhängend sind.

Definition 2.1:

Es sei Γ eine Geometrie über \mathbb{N}_n . Eine Fahne $\{f_1, \dots, f_s\}$ heißt **geordnet**, in Zeichen $[f_1, \dots, f_s]$, wenn $t(f_1) < \dots < t(f_s)$ ist.

Es sei \mathbf{K}_i die Menge der geordneten Fahnen vom Rang i . Es sei R ein Ring. Es sei

$$C_i := C_i(\Gamma) := R^{\mathbf{K}_{i+1}}, \quad 0 \leq i \leq n-1$$

der freie R -Modul mit Basis \mathbf{K}_{i+1} . Für

$$E \in \mathbf{K}_{i+1} \text{ and } c := \sum_{F \in \mathbf{K}_{i+1}} a_F F \in C_i \text{ sei } c(E) := a_E.$$

Für $F \in \mathbf{K}_{i+1}$ sei $F^l \in \mathbf{K}_i$ durch $F \setminus F^l := [f_l]$ definiert. Wir definieren die Randabbildung ∂_i wie folgt:

$$\partial_i(F)(G) = \begin{cases} (-1)^{k+1} & \text{wenn } G = F^k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Auswertung liefert

$$\partial_i(F) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} F^k.$$

Ferner sei $\partial_i = 0$. Dann sind ∂_i für alle $0 \leq i \leq n-1$ auf den Basen definiert und werden auf ganz C_i zu R -Homomorphismen $\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$ fortgesetzt [20; 2.2.6].

Wir setzen noch $C_i := 0$ und $\partial_i := 0$ für alle $i < 0$ und $i > n-1$. Dann ist die Folge $(C_n, \partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ definiert.

Die R -Homomorphismen $(\partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ heißen **Randmorphisismen**.

Bemerkung 1:

Die Definition des Index' von C_i durch die geordneten Fahnen vom Rang $i+1$ hängt nur mit der Anpassung an die Topologie zusammen.

Die Menge aller Fahnen definiert einen abstrakten simplizialen Komplex [20; 1.9], den sogenannten Fahnenkomplex der Geometrie [33]. Anstatt geordneter Fahnen kann die Homologie auch vermöge orientierter Fahnen definiert werden [20, 2.1]. Eine geordnete Fahne ist dann ein fest gewählter Repräsentant der orientierten Fahne. Der Repräsentant ist durch die Reihenfolge der Typen gegeben. Deshalb können alle Ergebnisse aus der Theorie der Homologie orientierter simplizialer Komplexe übernommen werden, soweit sie nicht mit den Definitionen von Geometrien und ihren Morphismen kollidieren (vgl. auch Bemerkung 3.).

Es sei jedoch bemerkt, dass eine Orientierung dann unerlässlich wird, wenn man als geometrische Objekte nur die sogenannten Punktschatten $\sigma_1(x) := \{s \in S \mid s I x, t(s) = 1\}$ für $x \in \Gamma$ (Rotman [29]).

In der von Rotman vorgelegter Arbeit ist also die Punktmenge ein Simplex. Dies ist keine Fahne und es liegt schließlich kein Fahnenkomplex vor. Letztlich werden auch hier keine Steiner-Systeme, sondern die hierzu assoziierten Geometrien untersucht. In der assoziierten Geometrie ist ein r -Simplex ein Element vom Type $r+1$. Diese Betrachtungsweise gilt nicht für alle Geometrien. Erstens muss der Punktschatten jedes Elementes der Geometrie eindeutig sein. Zweitens ist nicht jeder Punktschatten ein Simplex.

Wir fassen nun die wesentlichen Eigenschaften der Randmorphismen zusammen.

Proposition 2.2:

1. Für jedes $r \in \mathbb{Z}$ ist die Komposition

$$\partial_r \partial_{r+1} : C_{r+1} \rightarrow C_{r-1}$$

trivial, d.h. $\partial_r \partial_{r+1} = 0$ [20; 2.2.8].

2. Es existiert ein surjektiver R -Homomorphismus $\text{ind} : C_0 \rightarrow R$ mit

$$\text{ind} \partial_1 = 0,$$

wobei ind durch $\text{ind}(s) := 1$ für alle $s \in S$ definiert ist [20; 2.7.3].

3. Die Folge

$$\mathbf{C} := (C_n, \partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

ist ein freier Links- R -Kettenkomplex [20; 3.1].

Definition 2.3:

Der freie Links- R -Kettenkomplex

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\text{ind}} 0 \longrightarrow \dots$$

heißt **Links- R -Geometrie-Komplex** von Γ , kurz **Geometriekomplex von Γ** .

Wegen $\text{im}(\partial_{i+1}) \subseteq \ker(\partial_i)$ nach Proposition 2.2, 1. existieren die Homologiemoduln vom Grad i :

$$\mathcal{H}_i^R(C(\Gamma)) := \ker(\partial_i) / \text{im}(\partial_{i+1}).$$

Wir bezeichnen die Homologiemoduln einfach mit $\mathcal{H}_i^R(\Gamma)$, wobei $i \in \mathbb{Z}$ ist.

Es seien \mathbf{C} und \mathbf{C}' zwei freie Links- R -Kettenkomplexe. Ein Morphismus $\Phi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ ist eine Familie von R -Morphismen $\Phi_i : C_i \rightarrow C'_i$, $i \in \mathbb{Z}$ mit

$$\Phi_{i-1} \circ \partial_i^C = \partial_{i-1}^{C'} \circ \Phi_i.$$

Bemerkung 2:

Morphismen von Geometriekomplexen existieren in natürlicher Weise. Jeder Morphismus von Geometrien induziert auf dem Fahnenkomplex einen Morphismus. Dieser ist eine spezielle simpliziale Abbildung [31; 3.1, 4.1.1, 4.1.2].

Man beachte, dass die Einschränkung einer simplizialen Abbildung auf ein Simplex nicht injektiv sein muss, aber die Einschränkung eines Morphismus' von Geometrien auf eine Fahne immer injektiv ist. Wir fassen zusammen.

Theorem 2.4: [31; 4.1]

Es seien Γ und Π Geometrien. Es sei $\Phi: \Gamma \rightarrow \Pi$ ein Morphismus. Dann induziert Φ in natürlicher Weise einen R -Morphismus $\Phi_i: C_i(\Gamma) \rightarrow C_i(\Pi)$ und dieser einen R -Morphismus $\Phi_{i,*}: \mathcal{H}_i^R(\Gamma) \rightarrow \mathcal{H}_i^R(\Pi)$ für jedes $i \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung 3:

Es sei $C^\circ(\Gamma)$ der orientierte Fahnenkomplex, wobei die Orientierung \circ durch die Ordnung der Typen gegeben ist. Bezeichne $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ die orientierte Fahne in $C^\circ(\Gamma)$, so ist durch $\Theta^\circ[f_1, \dots, f_s] := \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ ein R -Isomorphismus von $C(\Gamma)$ auf $C^\circ(\Gamma)$ gegeben. Insbesondere induziert Θ° einen R -Isomorphismus von $\mathcal{H}_i^R(C(\Gamma))$ auf $\mathcal{H}_i^R(C^\circ(\Gamma))$ [20, 2.3]. Andererseits induziert jede Orientierungsänderung einen R -Isomorphismus der Homologiemoduln, so dass wir in der Tat von den Homologiemoduln der Geometrie sprechen dürfen.

Die Betrachtungsweise als Fahnenkomplex liefert eine interessante Variante der baryzentrischen Unterteilung [20,1]. Dazu setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass in einem simplizialen Komplex alle maximalen Simplexe die gleiche Dimension n haben. Wir sprechen in diesem Fall von einem n -dimensionalen simplizialen Komplex. Ein solcher n -dimensionaler simplizialer Komplex assoziiert eine Geometrie vom Rang $n+1$ wie folgt:

Jedes i -dimensionale Simplex ist ein Element vom Typ $i+1$ und zwei Simplexe inzidieren, wenn eins von beiden im anderen enthalten ist.

Theorem 2.5:

Es sei \mathbf{S} ein n -dimensionaler simplizialer Komplex und Γ die zu \mathbf{S} assoziierte Geometrie. Dann ist der Fahnenkomplex isomorph zur ersten baryzentrischen Unterteilung \mathbf{S}^1 von \mathbf{S} .

Insbesondere gilt

$$\mathcal{H}_i^R(\Gamma) \cong \mathcal{H}_i^R(\mathbf{S}).$$

Beweis:

Es sei s ein Simplex maximaler Dimension. Es sei $T := \{t \mid t \subseteq s\}$ die Menge aller Teilsimplexe von s . Definieren wir e^u , $u \in T$ als neue Punkte, so ist $\kappa_{l+1}[s_0, \dots, s_l] := \{e^{s_0}, \dots, e^{s_l}\}$ ein l -Simplex in \mathbf{S}^1 und κ ein Morphismus von Links- R -Komplexen. Insbesondere gilt somit nach Bemerkung 1, 2 und [20; 3.1.9] die erste Isomorphie

$$\mathcal{H}_i^R(\Gamma) \cong \mathcal{H}_i^R(\mathbf{S}^1) \cong \mathcal{H}_i^R(\mathbf{S}).$$

Die zweite Isomorphie folgt mit [20, 3.5.7].

Definition 2.6:

Es sei Γ eine Geometrie und $C(\Gamma)$ der Geometriekomplex. Es sei t die Typenabbildung. Für $c \in C_i$ definieren wir

$$t(c) := \bigcup_{\substack{F \in \mathbf{K}_{i+1} \\ c(F) \neq 0}} t(F).$$

Korollar 2.7:

Ist Γ zu einem simplizialen Komplex assoziiert, so gibt es zu jedem Zykel $z \in \ker(\partial_{i-1})$ ein z' mit $t(z') = \mathbb{N}_k$, so dass $z + \text{im}(\partial_k) = z' + \text{im}(\partial_k)$.

Beweis:

Man betrachte folgende Isomorphismen.

$$\mathcal{H}_{k-1}^R(\Gamma) \xrightarrow{\kappa_{k,*}} \mathcal{H}_{k-1}^R(\mathbf{S}^1) \xrightarrow{\alpha_{k-1,*}} \mathcal{H}_{k-1}^R(\mathbf{S}) \xrightarrow{\beta_{k-1,*}} \mathcal{H}_{k-1}^R(\Gamma),$$

wobei $\alpha_{k-1,*}$, $\beta_{k-1,*}$ die in [20, 3.5.7] definierten Isomorphismen sind. Vergleiche auch [20, 3.2.9].

Für Geometrien muss 2.7 im Allgemeinen nicht stimmen. Es gilt jedoch:

Korollar 2.8:

Es sei Γ eine Geometrie. Für $k \in \{0;1\}$ gibt es zu jedem Zykel $z \in \ker(\partial_k)$ ein z' mit $t(z') = \mathbb{N}_{k+1}$, so dass $z + \text{im}(\partial_{k+1}) = z' + \text{im}(\partial_{k+1})$.

Beweis:

Für $k=0$ sind je zwei Elemente der Geometrie homolog. Sei also $k=1$ und $z \in \ker(\partial_1)$. Wir zeigen zunächst, dass es einen Zykel z^* gibt mit $z^* + \text{im}(\partial_2) = z + \text{im}(\partial_2)$, so dass jede Fahne in $\Gamma(z^*)$ ein Element vom Type 1 enthält. Dazu sei $[x, y]$ eine geordnete Fahne mit $z([x, y]) = a_{[x, y]} \neq 0$ und $1 \notin t(\{x, y\})$. Da Γ eine Geometrie ist, existiert eine geordnete Fahne $[a, x, y]$ mit $t(a) = 1$. Wir erhalten

$$\partial_2 [a, x, y] = [x, y] - [a, y] + [a, x]$$

und

$$z + \text{im}(\partial_2) = z - a_{[x, y]} ([x, y] - [a, y] + [a, x]) + \text{im}(\partial_2).$$

Setzen wir $z_1 := z - a_{[x, y]} ([x, y] - [a, y] + [a, x])$ und fahren mit z_1 fort, so erhalten wir ein z^* wie behauptet.

Wir dürfen also $z = z^*$ mit $t(x) = 1$ annehmen. Ist $t(y) = 2$, so ist nichts zu zeigen.

Sei also $t(y) \neq 2$ und $[u, y]$ eine Fahne mit $t(u) = 1$. Da Γ streng zusammenhängend ist, finden wir in Γ_y geordnete Fahnen $[x, g_1], [x_1, g_1], \dots, [x_n, g_{n+1}], [u, g_{n+1}]$ mit $t(x_i) = 1$ und $t(g_i) = 2$. Betrachten wir

$$z'' = [x, g_1, y] - \sum_{j=1}^n (-1)^{i+1} [x_j, g_j, y] + \sum_{j=1}^n [x_j, g_{j+1}, y] + (-1)^n [u, g_{n+1}, y],$$

so folgt

$$\partial_2 z'' = -[x, y] - (-1)^n [u, y] + [x, g_1] + (-1)^n [u, g_{n+1}] - \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} [x_j, g_j] + \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} [x_j, g_{j+1}].$$

Setzen wir $z_1 = z + a_{[x,y]} \partial_2 z''$, so gilt $z_1 \in \ker(\partial_1)$ und $z_1([x, y]) = 0$. Fahren wir mit z_1 weiter fort, so erhalten wir ein z' wie behauptet.

Definition 2.9:

Es sei Γ eine Geometrie vom Rang n , \mathbf{F}_n die Menge der Kammern und F eine Kammer. Es sei \mathbb{Z} der Ring der ganzen Zahlen.

Γ heißt *orientierbar*, wenn eine Abbildung

$$\beta_F : \begin{cases} \mathbf{F}_n & \rightarrow \mathbb{Z} \\ E & \mapsto (-1)^{\ell(G)} \end{cases}$$

existiert, wobei $\ell(G)$ die Länge einer einfachen reduzierten Galerie G von F nach E ist.

Γ heißt *dünn orientierbar* bezüglich F , wenn gilt:

1. Γ dünn zusammenhängend bezüglich F .
2. Jede dünne Teilgeometrie des dünnen Zusammenhangssystems orientierbar ist.

Im Folgenden schreiben wir kurz $G = \langle F; E \rangle$ und nennen β_F die *Orientierungsabbildung*.

Die Definition der dünnen Orientierbarkeit ist sicher sinnvoll, wie folgendes Beispiel zeigt.

Es sei Γ die Geometrie des vollständigen Graphen bestehend aus vier Punkten. Dann existiert zu jeder reduzierten Galerie G der Länge vier eine weitere reduzierte Galerie G' der Länge drei. Beide haben eine gemeinsame Anfangs- und Endkammer.

Für dünne Geometrien (Pseudomannigfaltigkeiten) gilt sogar folgendes.

Lemma 2.10:

Es sei Γ eine dünne Geometrie vom Rang n .

1. Existiert eine Orientierungsabbildung β_F bezüglich der Kammer F , so ist sie eindeutig bestimmt.
2. Genau dann existiert eine Orientierungsabbildung $\beta_F : \mathbf{F}_n \rightarrow \mathbb{Z}$, wenn es keine geschlossene Galerie ungerader Länge in Γ gibt.

Beweis:

1. Es sei β_F gegeben. Dann gilt für zwei beliebige i -benachbarte Kammern $B \sim_i D$ die Gleichung $\beta_F(B) + \beta_F(D) = 0$, denn nach Voraussetzung ist Γ dünn. Die Eindeutigkeit folgt nun aus der Tatsache, dass in einer dünnen Geometrie jede Galerie zu einer reduzierten Galerie homotop ist.

2. Existiert β_F , dann gibt es nach 1. keine geschlossene Galerie ungerader Länge. Gibt es keine geschlossene Galerie ungerader Länge, so existiert zu jeder Kammer L eine Orientierungsabbildung β_L .

Im Falle von Gebäuden vom Type M lässt sich die Orientierungsabbildung von einem Apartment auf die ganze Geometrie fortsetzen.

Lemma 2.11: [32; 3.], [33]

Es sei Γ ein Gebäude vom Type M und F eine Kammer.

1. Je zwei Kammern liegen in einem Apartment.
2. In einem Apartment existiert zu jeder Kammer genau eine Kammer mit maximalem Abstand.
3. Je zwei Kammern mit maximalem Abstand bestimmen ein Apartment.
4. Je zwei reduzierte Galerien mit gemeinsamer Anfangs- und Endkammer sind homotop.
5. Alle Apartments sind Coxeter-Geometrien desselben Typs M .

Die beiden in 2. genannten Kammern heißen *oppositionelle* beziehungsweise *diametrale Kammern*.

Proposition 2.12:

Es sei Γ ein Gebäude vom Type M und F eine Kammer.

1. Es gibt eine Orientierungsabbildung $\beta_F : \mathbf{F}_n \rightarrow \mathbb{Z}$.
2. Γ ist dünn orientierbar bezüglich jeder Kammer.

Beweis:

1. Nach Lemma 2.11 4. sind in einem Gebäude je zwei reduzierte Galerien mit gemeinsamer Anfangs- und Endkammer homotop. Zwei reduzierte Galerien, die homotop sind, besitzen nach 1.11 und 1.12 die gleiche Länge.

2. Es sei E eine geordnete Kammer. Es sei \mathfrak{Z}_E das dünne Zusammenhangssystem bezüglich der geordneten Kammer E . Nach 1. sind die Apartments orientierbar bezüglich jeder Kammer, also $\mathfrak{Z}_E \neq \emptyset$. Insbesondere ist nach 1. und 2.10 2. jede dünne Geometrie aus \mathfrak{Z}_E orientierbar.

Es werden nun die Homologiemoduln des kleinsten und größten Grades genauer charakterisiert.

Theorem 2.13: [20; 2.4]

Es sei Γ eine Geometrie. Dann ist $\text{ind}_* : H_0^R(\Gamma) \rightarrow R$ ein Isomorphismus (vgl. 2.2 2.). Ein erzeugendes Element des Homologiemoduls ist durch $x + \text{im}(\partial_1)$ gegeben, wobei x ein beliebiges Element der Geometrie ist.

Der nullte Homologiemodul $\mathcal{H}_0^R(\Gamma)$ misst die Anzahl der schwach zusammenhängenden Komponenten der Geometrie, wenn Γ nicht als schwach zusammenhängend vorausgesetzt wird.

Wir wenden uns den Homologiemoduln der größten Grade zu und betrachten zuerst den Spezialfall der dünnen Geometrien. Als abstrakte simpliziale Komplexe sind dies Pseudomannigfaltigkeiten. [31; 3.8]

Proposition 2.14: [31; 4. E.2]

Es sei R ein Ring und Γ eine dünne Geometrie vom Rang n .

1. Es sei Γ orientierbar und F eine Kammer. Es sei $c_F := \sum_{E \in \mathbf{K}_n} (-1)^{\ell(\langle F, E \rangle)} E$. Dann ist

$$\mathcal{H}_{n-1}^R(\Gamma) = \langle c_F \rangle \cong R.$$

2. Es sei Γ nicht orientierbar und $c := \sum_{E \in \mathbf{K}_n} E$. Dann ist

$$\mathcal{H}_{n-1}^R(\Gamma) = \{a \cdot c \mid a \in R \text{ und } 2a = 0\} \cong \{a \in R \mid 2a = 0\}.$$

Beweis:

Wir skizzieren einen eigenen Beweis. Dazu erinnern wir, dass $\mathcal{H}_{n-1}^R(\Gamma) = \ker(\partial_{n-1})$ ist. Für

$$c := \sum_{E \in \mathbf{K}_n} a_E E \in \mathcal{H}_{n-1}^R(\Gamma)$$

ist

$$(\partial_{n-1}(c))(G) = (-1)^{k+1} (a_C + a_D),$$

wobei $C^k = D^k = G$ und damit $a_C + a_D = 0$ für je zwei benachbarte Kammern ist. Da Γ zusammenhängend ist, ergibt sich entweder

$$c = a \sum_{E \in \mathbf{K}_n} (-1)^{\ell(\langle F, E \rangle)} E,$$

wobei $a = a_F$ für jede Kammer $F \in \mathbf{K}_n$ oder

$$c = b \sum_{E \in \mathbf{K}_n} E,$$

wobei $b = b_F$ für jede Kammer $F \in \mathbf{K}_n$ und $2b = 0$ ist. Daraus folgt die Behauptung.

Definition 2.15:

Ein von null verschiedener Zyklus, der wie in 2.14 durch eine dünne Geometrie induziert wird heißt *einfacher Zyklus*.

Im dünnen Fall ist damit der Homologiemodul des größten Grades bekannt. Wir wenden uns daher dem allgemeinen Fall zu und geben eine andere Beschreibung dieses Homologiemoduls an.

Definition 2.16:

Es sei Γ eine Geometrie vom Rang n . Es sei $\mathcal{H}_R(\Gamma)$ die *Hecke-Algebra* über R [25], die erzeugt wird von $\{\sigma_i \mid i \in \mathbb{N}_n\}$, wobei

$$\sigma_i := \begin{cases} C_{n-1} & \rightarrow C_{n-1} \\ F & \mapsto \sum_{E \sim_i F} E. \end{cases}$$

Die Hecke-Algebra ist eine Unter algebra der Endomorphismenalgebra $End_R(C_{n-1})$.

Der Untermodul

$$St := \left\{ c \in C_{n-1} \mid \sigma_i(c) = -c \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_n \right\}$$

von C_{n-1} heißt **Steinberg-Modul** der Geometrie Γ .

In der Darstellungstheorie der Hecke-Algebra über den komplexen Zahlen \mathbb{C} tritt der Steinberg-Modul mit genau dieser Definition auf, und der Rang des Steinberg-Moduls ist die Vielfachheit m_{st} des Charakters

$$st: \begin{cases} \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(\Gamma) & \rightarrow \mathbb{C} \\ \sigma_i & \mapsto -1, \end{cases}$$

wobei die Vielfachheit m_{st} durch $\langle \phi, st \rangle = m_{st} \langle st, st \rangle$ definiert ist. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist die in [25] definierte Bilinearform und ϕ der Standardcharakter.

Theorem 2.17:

Es sei Γ eine Geometrie vom Rang n . Dann ist

$$\mathcal{H}_{n-1}^R(\Gamma) \cong St.$$

Beweis:

Es sei $c = \sum_{F \in \mathbf{K}_n} a_F F$. c ist genau dann ein Zyklus in $\mathcal{H}_{n-1}^R(\Gamma)$, wenn für alle $E \in \mathbf{K}_n$ und alle $i \in \mathbb{N}_n$ gilt:

$$0 = (\partial_{n-1} c)(E^i) = (-1)^{i+1} \sum_{\substack{F \in \mathbf{K}_n \\ E^i \subset F}} a_F$$

Andererseits ist für jedes $i \in \mathbb{N}_n$

$$\begin{aligned} \sigma_i(c) &= \sum_{F \in \mathbf{K}_n} a_F \sigma_i(F) = \sum_{F \in \mathbf{K}_n} a_F \left(\sum_{\substack{G \in \mathbf{K}_n \\ F^i \subset G}} G - F \right) \\ &= - \sum_{F \in \mathbf{K}_n} a_F F + \sum_{F \in \mathbf{K}_n} a_F \sum_{\substack{G \in \mathbf{K}_n \\ F^i \subset G}} G. \end{aligned}$$

Folglich ist c genau dann im Steinberg-Modul, wenn für alle $i \in \mathbb{N}_n$ gilt:

$$\sum_{F \in \mathbf{K}_n} a_F \sum_{\substack{G \in \mathbf{K}_n \\ F^i \subset G}} G = 0.$$

Mit anderen Worten: c ist genau dann im Steinberg-Modul, wenn für alle Kammern $E \in \mathbf{K}_n$ und alle $i \in \mathbb{N}_n$ gilt:

$$0 = \left(\sum_{F \in \mathbf{K}_n} a_F \sum_{\substack{G \in \mathbf{K}_n \\ F' \subset G}} G \right) (E) = \sum_{\substack{F \in \mathbf{K}_n \\ E' \subset F}} a_F$$

Damit ist alles bewiesen.

Wir wollen noch ein ausgezeichnetes Erzeugendensystem des Steinberg-Moduls angeben.

Proposition 2.18:

Es sei Γ eine zusammenhängende feste Geometrie vom Rang n . Es sei K eine fest gewählte Kammer.

(*) Zu jedem geschlossenen Zyklus c des Steinberg-Moduls gebe es zwei nichtbenachbarte geordnete Kammern, von der jede zu einer geordneten Nachbarkammer in $\Gamma(c)$ noch eine weitere verschiedene Nachbarkammer desselben Typs außerhalb von c haben.

Dann wird der Steinberg-Modul durch geschlossene Zyklen c erzeugt, die K enthalten.

Beweis:

Ist c_1 ein Zyklus des Steinberg-Moduls mit $c_1(K) \neq 0$, so ist nichts zu zeigen. Es sei also c_1 ein Zykel mit $c_1(K) = 0$. Seien E und F zwei nichtbenachbarte geordnete Kammern mit $c_1(E) \neq 0$ und $c_1(F) \neq 0$, die (*) erfüllen. Seien $E_1 \sim_i E$ und $F_1 \sim_j F$ in c_1 sowie $E_2 \sim_i E$ und $F_2 \sim_j F$. Da Γ zusammenhängend ist, gibt es eine Galerie \mathbf{G} von K nach E über E_2 . Da Γ fest ist, finden wir eine Galerie \mathbf{H} von K nach F über F_2 , wobei außer K keine Kammer der Galerie \mathbf{H} in der Galerie \mathbf{G} vorkommt. Seien nun o. B. d. A. die Galerie \mathbf{J} : $E \sim_i E_1 \sim \dots \sim F_1 \sim_j F$ in c_1 und \mathbf{L} die Galerie von F nach E , so dass \mathbf{JL} den Zyklus c_1 induziert. Dann ist $\mathbf{GL}^{-1}\mathbf{H}^{-1}$ eine geschlossene Galerie und induziert einen geschlossenen Zyklus \hat{c} des Steinberg-Moduls mit $\hat{c}(K) = 1$. Ferner ist $\bar{c} := \hat{c} - c_1$ ein geschlossener Zyklus mit $\bar{c}(K) = 1$, aufgrund der Konstruktion. Damit ist die Behauptung erbracht.

Korollar 2.19:

1. Lässt man unzusammenhängende Zyklen zu, so ist Proposition 2.18 auch ohne den Zusatz richtig.
2. Ist die Geometrie dick, so ist der Zusatz immer erfüllt.

Theorem 2.20: (Hopfsche Spurformel)

Es seien R ein Hauptidealring, Γ eine Geometrie vom Rang n und Φ ein Morphismus des Geometriekomplexes $\mathbf{C}(\Gamma)$ in sich. Es sei $\text{fg}(\mathcal{Z}_i^R(\Gamma))$ der Rang des freien Untermoduls von $\mathcal{Z}_i^R(\Gamma)$. Es sei $\mathcal{Z}_i(\Gamma)$ der torsionsfreie Untermodul von $\mathcal{Z}_i^R(\Gamma)$ und $\Phi_{i,*}^F$ die Restriktion von Φ auf $\mathcal{Z}_i(\Gamma)$. Dann gilt

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \text{spur}(\Phi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \text{spur}(\Phi_{i,*}^F).$$

Korollar 2.21:

Ist insbesondere Φ die Identität, so ergibt sich die Euler-Poincarè-Charakteristik

$$\chi(\Gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i |\mathbf{K}_{i+1}(\Gamma)| = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \text{fg}(\mathcal{F}_i^R(\Gamma)).$$

Einen Beweis von 2.20 und 2.21 findet man in [20; 5.1.19 ff].

Für Geometrien vom Rang zwei folgt mit $\text{rg}(\mathcal{F}_0^R(\Gamma)) = 1$ hieraus:

$$\text{rg}(\mathcal{F}_1^R(\Gamma)) = |\mathbf{K}_2| - |\mathcal{S}_1| - |\mathcal{S}_2| + 1.$$

Wir wollen noch eine weitere Anwendung für Endomorphismen von Geometrien aus der hopfschen Spurformel ableiten.

Lemma 2.22:

Es sei $\Phi: \Gamma \rightarrow \Gamma$ ein Endomorphismus der Geometrie Γ vom Rang n . Es sei $\text{Fix}_{\mathbf{F}_i}(\Phi)$ die Menge der Fixfahnen vom Rang i von Φ , also $\text{Fix}_{\mathbf{F}_i}(\Phi) = \{F \in \mathbf{F}_i \mid \Phi(F) = F\}$.

1. Ist $\Phi(t^{-1}(j)) \subset t^{-1}(n+1-j)$ für alle $1 \leq j \leq n$, so gilt

$$\text{spur}(\Phi_{2i-1}) = (-1)^i |\text{Fix}_{\mathbf{F}_{2i}}(\Phi)|$$

und

$$\text{spur}(\Phi_{2i}) = (-1)^i |\text{Fix}_{\mathbf{F}_{2i+1}}(\Phi)|.$$

2. Ist Φ typenerhaltend, so gilt

$$\text{spur}(\Phi_{i-1}) = (-1)^i |\text{Fix}_{\mathbf{F}_i}(\Phi)|.$$

Beweis:

Es sei F_1, \dots, F_p eine Basis von C_{i-1} . Es sei D_{i-1} eine normierte Determinantenform bezüglich $\{F_1, \dots, F_p\}$. Dann ist $\text{spur}(\Phi_{i-1}) = \sum_{j=1}^p D_{i-1}(F_1, \dots, \Phi_{i-1}(F_j), \dots, F_p)$. Da Φ_{i-1} als Endomorphismus der Geometrie die Fahnen permutiert, ist nur zu überlegen, dass alle Vorzeichen der geordneten Bildfahnen übereinstimmen. Dazu sei $[f_1, \dots, f_k]$ eine geordnete Fahne vom Rang k , also $t(f_1) < \dots < t(f_k)$. Im 1. Fall gilt nun für die geordnete Bildfahne $t(\Phi(f_k)) < \dots < t(\Phi(f_1))$. Daraus folgt die Behauptung für 1. Der zweite Teil folgt nun aus der Typenerhaltung von Φ .

Korollar 2.23:

Es sei $\Phi: \Gamma \rightarrow \Gamma$ ein Endomorphismus der Geometrie Γ vom Rang 2. Es sei

$$\text{Fix}_{\mathbf{F}_i}(\Phi) := \{F \in \mathbf{F}_i \mid \Phi(F) = F\}$$

Die Menge der Fixfahnen vom Rang i von Φ .

1. Ist $\Phi^{-1}(t^{-1}(j)) \subset t^{-1}(3-j)$ für $j \in \{1; 2\}$, so gilt

$$\text{spur}(\Phi_{1,*}^F) = -|\text{Fix}_{F_2}(\Phi)| + 1.$$

2. Ist Φ typenerhaltend, so gilt

$$\text{spur}(\Phi_{1,*}^F) = |\text{Fix}_{F_2}(\Phi)| - |\text{Fix}_{F_1}(\Phi)| + 1.$$

Beweis:

Folgt unmittelbar aus 2.20 in Verbindung mit 2.22.

Wir stellen jetzt einige Tatsachen über Kohomologiemoduln zusammen.

Definition 2.24: [20; 2.9]

Es sei $C(\Gamma)$ ein Geometriekomplex über einem Ring R . Für jedes $i \in \mathbb{Z}$ sei

$$C^i := \text{Hom}(C_i; R)$$

der zu C_i duale R -Modul. Eine Basis von C^i ist durch die charakteristischen Abbildungen $\xi_F(E) := \delta_{EF}$ gegeben, wobei E und F geordnete Fahnen vom Rang $i+1$ sind. Wir identifizieren ξ_F mit F für alle Basiselemente und definieren auf der Basis

$$\delta^i : \begin{array}{ccc} C^i & \rightarrow & C^{i+1} \\ F & \mapsto & \delta^i(F) \end{array}$$

wobei

$$(\delta^i(F))(G) := F(\partial_{i+1}(G)).$$

Vermöge dieser Definition ist

$$(\mathcal{C}, \delta) := (C^i, \delta^i)_{i \in \mathbb{Z}}$$

ein Rechts- R -Komplex. Wir bezeichnen ihn als **Geometriekomplex**.

Es ist offensichtlich, dass bei der charakteristischen Abbildung keine geordneten Fahnen notwendig sind. Trotzdem werden weiterhin geordnete Fahnen betrachtet, da es einerseits keine Einschränkung darstellt, andererseits die Darstellung vereinfacht.

Wegen $\delta^{i+1}\delta^i = 0$ gilt wieder $\text{im}(\delta^i) \subset \ker(\delta^{i+1})$. Folglich existieren die Kohomologiemoduln

$$\mathcal{H}_R^i(\Gamma) := \ker(\delta^i) / \text{im}(\delta^{i-1}).$$

Bemerkung 4:

Da wir C^i mit C_i identifizieren, gilt aufgrund der Definition insbesondere

$$\text{im}(\delta^{i+1}) \perp \ker(\partial_i).$$

Wie in der Homologie misst der erste Kohomologiemodul die schwach zusammenhängenden Komponenten der Geometrie.

Proposition 2.25: [31; 5,4.10]

Es sei R ein Ring und Γ eine Geometrie. Dann ist

$$c = \sum_{x \in \mathbf{K}_1} x \in \mathcal{H}_R^0(\Gamma)$$

ein erzeugendes Element. Insbesondere ist $\mathcal{H}_R^0(\Gamma) \cong R$.

Bei der Untersuchung von Kohomologiemoduln muss man das Bild $\text{im}(\delta^i)$ genau kennen.

Proposition 2.26:

Es sei (\mathcal{C}, δ) ein Geometriekokomplex. Auf der Menge der geordneten Fahnen \mathbf{K}_i vom Rang i wird durch $E \approx F \Leftrightarrow t(E) = t(F)$ eine Äquivalenzrelation eingeführt. Bezeichne $\mathbf{K}_i^{(E)}$ die Äquivalenzklasse, die E enthält, dann gilt:

$$\mathbf{K}_i = \coprod_{\substack{T \subset \mathbb{N}_n \\ |T|=i}} \mathbf{K}_i^T,$$

und die Menge

$$\left\{ \sum_{\substack{T \subset \mathbb{N}_n \\ |T|=i+1}} \sum_{\substack{A \in \mathbf{K}_{i+1}^T \\ B=A^j}} (-1)^{j+1} A \mid B \in \mathbf{K}_i \right\}$$

erzeugt das Bild $\text{im}(\delta^{i-1})$.

Beweis:

Nur der zweite Teil ist zu verifizieren. Dazu sei $H \in \mathbf{K}_i$ eine geordnete Fahne. Es ist nach Definition:

$$(\delta^{i-1} H)G = H(\partial_i G) = \sum_{j=1}^{\text{rg}(G)} (-1)^{j+1} \delta_{HG^j}$$

für jede geordnete Fahne $G \in \mathbf{K}_{i+1}$. Folglich ist

$$\delta^{-1} H = \sum_{\substack{T \subset \mathbb{N}_n \\ |T|=i+1}} \sum_{\substack{A \in \mathbf{K}_{i+1}^T \\ B=A^j}} (-1)^{j+1} A$$

Einige Elemente des Kernes $\ker(\delta^{i-1})$ findet man leicht.

Lemma 2.27:

1. Ist $i+1$ gerade, dann ist $\sum_{F \in \mathbf{K}_i} F \in \ker(\delta^{i-1})$.
2. Es sei $C \in \mathbf{K}_{i-1}$ eine Fahne. Für jede Fahne $A \in \Gamma_C$ sei $[A, C]$ die geordnete Fahne $A \cup C$. Es stehe $y \in \Gamma_C$ an der $\varepsilon(y)$ -Stelle in $[y, C]$. Dann ist

$$x_C := \sum_{y \in \Gamma_C} (-1)^{\varepsilon(y)+1} [y, C] \in \ker(\delta^{i-1}).$$

Beweis:

1. $(\delta^{i-1}(\sum_{F \in \mathbf{K}_i} F))K = \sum_{F \in \mathbf{K}_i} F(\partial_i K) = \sum_{r=1}^{i+1} (-1)^{r+1} = 0$.
2. Es sei $F \in \mathbf{K}_{i+1}$. Dann ist $(\delta^{i-1}x_C)F = 0$, falls $C \not\subset F$. Sei also $C \subset F$ und damit $F = [a, b, C]$ mit $t(a) < t(b)$. Es stehe a an der j -ten Stelle und b an der k -ten Stelle in der geordneten Fahne $[a, b, C]$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} (\delta^{i-1}x_C)F &= x_C(\partial_i F) = (-1)^{j+1} x_C([a, C]) + (-1)^{k+1} x_C([a, C]) \\ &= (-1)^{j+1} (-1)^k + (-1)^{k+1} (-1)^{j+1} = 0 \end{aligned}$$

nach Definition von x_C und ε . Damit ist alles gezeigt.

Proposition 2.28:

Es sei Γ eine dünne Geometrie vom Rang n und E eine Kammer.

1. Ist Γ orientierbar, so ist

$$\mathcal{H}_R^{n-1}(\Gamma) = \langle E + \text{im}(\delta^{n-2}) \rangle \cong R.$$

2. Ist Γ nicht orientierbar, so ist

$$\mathcal{H}_R^{n-1}(\Gamma) = \langle E + \text{im}(\delta^{n-2}) \rangle \cong R/2R.$$

Man beachte: Ist 2 in R invertierbar, so ist $R/2R = 0$.

Beweis:

Es sei daran erinnert, dass Γ zusammenhängend ist. Es sei zuerst Γ als orientierbar vorausgesetzt. Angenommen, $aE \in \text{im}(\delta^{n-2})$ für irgendeine geordnete Kammer E und $a \in R$, $a \neq 0$. Dann gibt es nach 2.14 1. einen von null verschiedenen Zyklus $c \in \mathcal{H}_{n-1}^R(\Gamma)$. Es folgt der Widerspruch

$$0 \neq aE(c) = (\delta^{n-2}\xi)(c) = \xi(\partial_{n-1}c) = \xi(0) = 0.$$

Ist $G \sim_i E$, so gilt $-E + \text{im}(\delta^{n-2}) = -E + E + G + \text{im}(\delta^{n-2}) = G + \text{im}(\delta^{n-2})$. Folglich ist in diesem Fall $X + \text{im}(\delta^{n-2})$ für jede geordnete Kammer X ein Erzeuger des Kohomologiemoduls und die

Abbildung $1 \mapsto X + \text{im}(\delta^{n-2})$ ein R -Isomorphismus von R auf $\mathcal{H}_R^n(\Gamma)$, da Γ zusammenhängend ist. Hieraus folgt **1**.

Es sei nun Γ nicht orientierbar. Es sei daran erinnert, dass für $u = \sum_{F \in \mathbf{K}_n} F$ die Gleichung $\partial_{n-1}u = 2 \sum_{H \in \mathbf{K}_{n-1}} H =: 2v$ gilt (vgl. Beweis zu 2.14). Angenommen, $aE = \delta^{n-2}\zeta \in \text{im}(\delta^{n-2})$ für irgendeine geordnete Kammer E und $a \in R$, $a \neq 0$. Dann gilt

$$a = aE(u) = (\delta^{n-2}\zeta)u = \zeta(\partial_{n-1}u) = \zeta(2v) = 2\zeta(v) \in 2R.$$

Andererseits existiert nach Lemma 2.11 eine geschlossene Galerie $E = E_1, \dots, E_{2k+1} = E$ geordneter Kammern ungerader Länge an jeder Kammer E .

Es sei $\lambda = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i (E_i \cap E_{i+1})$. Damit ist $\delta^{n-2}\lambda = 2E \in \text{im}(\delta^{n-2})$. Folglich ist

$$\beta: \begin{cases} R & \rightarrow & \mathcal{H}_R^{n-1} \\ a & \mapsto & aE + \text{im}(\delta^{n-2}) \end{cases}$$

ein linearer Epimorphismus mit $\ker(\beta) = 2R$. Damit ist auch **2** bewiesen

Wir wollen diesen Abschnitt mit einigen nützlichen Bemerkungen beschließen.

Proposition 2.29:

Es sei Π eine Teilgeometrie von Γ . Es seien beide Geometrien vom Rang n .

1. Eine Basis A von $\mathcal{H}_{n-1}^R(\Pi)$ ist in $\mathcal{H}_{n-1}^R(\Gamma)$ linear unabhängig.
2. Ein Repräsentantensystem $\mathcal{B} := \{F_1, \dots, F_r\}$ geordneter Fahnen eines minimalen Erzeugendensystems von $\mathcal{H}_R^{n-1}(\Pi)$ kann zu einem Repräsentantensystem eines minimalen Erzeugendensystems für $\mathcal{H}_R^{n-1}(\Gamma)$ erweitert werden.

Beweis:

Die Aussage **1** folgt sofort aus $\mathcal{H}_R^{n-1}(\Pi) \subset \mathcal{H}_R^{n-1}(\Gamma)$ mittels linearer Algebra.

Wir beweisen **2**.

Angenommen, $\sum_{i=1}^r a_i F_i = \delta_\Gamma^{n-2}(x)$ für ein $x \in C_{n-2}(\Gamma)$. Da Π eine Teilgeometrie von Γ ist, finden wir $C_{n-2}(\Pi)$ als Teilraum von $C_{n-2}(\Gamma)$ wieder. Aufgrund der freien Basen (vgl. 2.1) gilt somit $C_{n-2}(\Gamma) = C_{n-2}(\Pi) \oplus C'_{n-2}$ und $x = x_\Pi + x'$. Es folgt für $F_l \in \mathcal{B}$ die Gleichung

$$a_l = (\delta_\Gamma^{n-2}x)F_l = x(\partial_{n-1}F_l) = x_\Pi(\partial_{n-1}F_l) + x'(\partial_{n-1}F_l).$$

Nach Voraussetzung ist $x_\Pi(\partial_{n-1}F_l) = 0$. Ferner nach Konstruktion $x'(\partial_{n-1}F_l) = 0$, denn $\partial_{n-1}F_l \in C_{n-2}(\Pi)$.

3. Die Steinberg-Moduln der sphärischen Gebäude

In diesem Abschnitt werden die Steinberg-Moduln der sphärischen Gebäude bestimmt. Hier wird ein von Solomon [30] unabhängiger Beweis gegeben. Insbesondere wird ein Teil des Theorems 1 in [30] verallgemeinert. Einen Beweis, der die Darstellungstheorie über \mathbb{C} benötigt und Gruppen mit (B, N) -Paaren voraussetzt, findet man in [9]. In [30] wird ein homologischer Beweis für die in [8] gegebenen Aussagen geliefert. Einen Beweis für sphärische Gebäude, der auf [30] beruht, findet man in [28]. Dieser Teil der Arbeit wurde bereits auf der DMV-Tagung in Berlin vorgetragen [17]. Darüber hinaus werden für die größten Kohomologiemoduln minimale Erzeugendensysteme angegeben.

Lemma 3.1:

Es sei Γ ein sphärisches Gebäude vom Rang n und W die Weyl-Gruppe vom Typ M . Es sei w_0 das längste Element in W und f_{w_0} den Typ von w_0 . Dieses ist eindeutig bestimmt [32]. Für einen Zyklus c bezeichne $\Gamma(c)$ die Teilgeometrie von Γ , die durch c induziert wird. Diese ist möglicherweise unzusammenhängend.

1. Ist G eine Galerie vom Typ $f_G \simeq f_{w_0}$, so gibt es genau ein Apartment, das G enthält. Insbesondere ist das Apartment durch die Anfang- und Endkammer der Galerie G eindeutig bestimmt. Diese sind oppositionell.
2. Ist $c \in \mathcal{Z}_{n-1}^R(\Gamma)$ ein von null verschiedener Zyklus, dann gibt es in $\Gamma(c)$ zu jeder Kammer A eine Galerie vom Typ f_{w_0} , die mit A beginnt.

Beweis:

1. Diese Aussage ist in [32; Proposition 3.25] bewiesen.

2. Es sei F eine Kammer mit $c(F) \neq 0$. Da jede Kammer einen i -Nachbarn besitzt und f_{w_0} reduziert ist, gibt es eine Galerie vom Typ f_{w_0} in $\Gamma(c)$. Insbesondere sind alle Kammern der Galerie nach 1. verschieden.

Theorem 3.2:

Es sei R ein Ring, Γ ein sphärisches Gebäude vom Rang n und F eine Kammer. Es sei $C(\Gamma)$ der Geometriekomplex. Es sei \mathcal{A}_F die Menge aller Apartments, die F enthalten. Es seien C_Σ für $\Sigma \in \mathcal{A}_F$ die oppositionellen geordneten Kammern zu F in Σ (vgl. 2.11).

1. Die Menge aller einfachen Zyklen, die induziert ist durch \mathcal{A}_F , eine Basis von $\mathcal{Z}_{n-1}^R(\Gamma)$. Insbesondere ist

$$\text{rg}(\mathcal{Z}_{n-1}^R(\Gamma)) = |\mathcal{A}_F|.$$

2. Die Menge $\{C_\Sigma \mid \Sigma \in \mathcal{A}_F\}$ ist ein Repräsentantensystem eines freien Erzeugendensystems des Kohomologiemoduls $\mathcal{Z}_R^{n-1}(\Gamma)$.

Beweis:

I. Die Menge \mathcal{A}_F ist ein Erzeugendensystem für $\mathcal{H}_{n-1}^R(\Gamma)$.

1. Wir zeigen zuerst, dass zu jedem von null verschiedenen Zyklus $c = \sum_{H \in \mathbf{K}_n} a_H H$ in $\mathcal{H}_{n-1}^R(\Gamma)$ eine zu F oppositionelle Kammer in $\Gamma(c)$ existiert. Dazu sei E eine Kammer in $\Gamma(c)$ mit minimalem Abstand zu F . Es sei G eine Galerie, die E und F verbindet. Diese ist nach 1.12 reduziert. Es sei g der Typ dieser Galerie. Da c ein Zyklus ist, hat jede Kammer einen i -Nachbarn für jedes i . Folglich kann die Galerie G in $\Gamma(c)$ zu einer Galerie L vom Typ f_{w_0} (siehe 3.1) fortgesetzt werden. Die Endkammer von L ist oppositionell.

Es seien nun E_j , $1 \leq j \leq s$ alle zu F oppositionellen Kammern in $\Gamma(c)$. Nach 2.11 **3.** bestimmen F und E_j genau ein Apartment. Sei dies Σ_j . Es sei c_j der durch Σ_j induzierte einfache Zyklus mit $c_j(F) = 1$. Dieser existiert nach Proposition 2.14 **I.** Es sei

$$c' = c - \sum_{j=1}^s (-1)^{\ell(f_{w_0})} c(E_j) c_j.$$

Dann ist nach Konstruktion $c'(E_j) = 0$ für alle $1 \leq j \leq s$. Insbesondere gibt es keine zu F oppositionelle Kammer D , die sowohl in $\Gamma(c)$ als auch in $\Gamma(c')$ liegt. Es gilt sogar $c' = 0$.

2. In $\Gamma(c')$ gibt es keine oppositionelle Kammer zu F . Angenommen, es gibt eine solche Kammer D . Dann ist nach obiger Bemerkung $c(D) = 0$. Insbesondere ist nach 2.11 **3.** $c_j(D) = 0$ für alle $1 \leq j \leq s$. Wir erhalten den Widerspruch $0 \neq c'(D) = c(D) = 0$. Da nach 1. aber jeder von null verschiedene Zyklus eine oppositionelle Kammer enthält, folgt $c' = 0$.

Die lineare Unabhängigkeit der einfachen Zyklen, die durch die Apartments induziert werden, ergibt sich nun wie folgt:

Es seien C_Σ , $\Sigma \in \mathcal{A}_F$ alle Kammern, die den Abstand $\ell(f_{w_0})$ von F haben und $c = \sum_{\Sigma \in \mathcal{A}_F} a_\Sigma C_\Sigma$, wobei c_Σ die einfachen Zyklen mit $c_\Sigma(F) = 1$ sind. Im Fall $c = 0$ ist $0 = c_\Sigma(C_\Sigma) = a_\Sigma$, denn die Kammer C_Σ ist nach Lemma 3.1, **I.** durch das Apartment eindeutig bestimmt [32]. Insbesondere ist $\text{rg}(\mathcal{H}_{n-1}^R(\Gamma)) = c(F) = |\mathcal{A}_F|$ für $a_\Sigma = 1$. Damit ist **I.** bewiesen.

2. Für den Kohomologiemodul bleibt zu zeigen:

a) Aus $\sum_{\Sigma \in \mathcal{A}_F} a_\Sigma C_\Sigma \in \text{im}(\delta^{n-2})$ folgt $a_\Sigma = 0$ für alle $\Sigma \in \mathcal{A}_F$.

b) Für jede geordnete Kammer F in Γ , die nicht in $\{C_\Sigma \mid \Sigma \in \mathcal{A}_F\}$ liegt, gibt es eine nicht triviale Linearkombination

$$a_Y Y + \sum_{\Sigma \in \mathcal{A}_F} a_\Sigma C_\Sigma \in \text{im}(\delta^{n-2}).$$

Die Aussage a) folgt unmittelbar aus $\text{im}(\delta^{n-2}) \perp \ker(\partial_{n-1})$ mit der Basis \mathcal{A}_F des Steinberg-Moduls.

Zu b) sei Y eine Kammer in Γ . Es sei x der Typ einer reduzierten Galerie von F nach Y und y der Typ einer reduzierten Galerie mit Y beginnend, so dass $f_{w_0} \approx xy$ ist. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach $\ell(y) \geq 1$. Für $\ell(y) = 1$ ist dies Proposition 2.26. Sei also $\ell(k) = k \geq 1$. Es seien Y_z , $1 \leq z \leq \alpha$ die geordneten Kammern, die q -benachbart zu Y sind mit $y = qy'$. Nach

Induktionsvoraussetzung gilt nun $Y_z + \text{im}(\delta^{n-2}) = \sum_{\substack{\Sigma \in \mathcal{A}_F \\ Y_z \in \Sigma}} a_\Sigma C_\Sigma + \text{im}(\delta^{n-2})$. Andererseits ist nach Proposition 2.26 auch $Y + \text{im}(\delta^{n-2}) = -\sum_{z=1}^\alpha Y_z + \text{im}(\delta^{n-2})$. Folglich ist

$$Y + \text{im}(\delta^{n-2}) = -\sum_{z=1}^\alpha \sum_{\substack{\Sigma \in \mathcal{A}_F \\ Y_z \in \Sigma}} a_\Sigma C_\Sigma + \text{im}(\delta^{n-2}).$$

Damit ist alles bewiesen.

Korollar 3.3:

Es sei Γ ein Gebäude vom sphärischen Typ M mit Parametern. Dann ist der Rang des Steinberg-Moduls in der nachfolgenden Liste angegeben.

A_n	$(n \geq 2)$	$X_1 = \dots = X_n = X,$	$\text{rg}(\mathcal{H}_{n-1}^R) = X^{\frac{n(n+1)}{2}}$
C_n	$(n \geq 2)$	$X_1 = \dots = X_{n-1} = X, X_n = Y,$	$\text{rg}(\mathcal{H}_{n-1}^R) = (X^{n-1}Y)^n$
D_n	$(n \geq 4)$	$X_1 = \dots = X_n = X,$	$\text{rg}(\mathcal{H}_{n-1}^R) = (X^n)^{n-1}$
H_3		$X_1 = X_2 = X, X_3 = Y,$	$\text{rg}(\mathcal{H}_2^R) = (X^2Y)^5$
H_4		$X_1 = X_2 = X_3 = X, X_4 = Y,$	$\text{rg}(\mathcal{H}_3^R) = (X^3Y)^{15}$
F_4		$X_1 = X_4 = X, X_2 = X_3 = Y,$	$\text{rg}(\mathcal{H}_3^R) = (X^2Y^2)^6$
E_6		$X_1 = \dots = X_6 = X,$	$\text{rg}(\mathcal{H}_5^R) = (X^6)^6$
E_7		$X_1 = \dots = X_7 = X,$	$\text{rg}(\mathcal{H}_6^R) = (X^7)^9$
E_8		$X_1 = \dots = X_8 = X,$	$\text{rg}(\mathcal{H}_7^R) = (X^8)^{15}$

Beweis:

Nach Theorem 3.2 ist in jeder Geometrie nur der Typ des längsten Elementes der Weyl-Gruppe anzugeben:

$$A_n : f_{w_0} = \prod_{i=1}^n (1 \cdots n + 1 - i)$$

$$C_n : f_{w_0} = (1 \cdots n)^n$$

$$D_{2m} : f_{w_0} = (1 \cdots (2m-1)2m)^{2m-1}, \quad D_{2m+1} : f_{w_0} = (1 \cdots (2m-1))((2m+1)2m \cdots 1)(2 \cdots (2m+1))^{2m-1}$$

$$H_3 : f_{w_0} = (123)^5$$

$$H_4 : f_{w_0} = (1234)^{15}$$

$$F_4 : f_{w_0} = (1234)^6$$

$$E_6 : f_{w_0} = (1234563423612345)(12364321)(2346)^3$$

$$E_7 : f_{w_0} = (1234567)^9$$

$$E_8 : f_{w_0} = (12345678)^{15}$$

Die längsten Elemente findet man wie folgt [16]:

Besitzt die Weyl-Gruppe ein Zentrumselement, so ist das Element bekannt (vgl. [13]).

Dies sind die Weyl-Gruppen vom Typ C_n , D_{2n} , H_3 , H_4 , F_4 , E_7 und E_8 .

Jedes Element besitzt eine eindeutige Zerlegung in seiner Nebenklasse nach einer Untergruppe. Bezeichne $W_i(M)$ die Untergruppe der Weyl-Gruppe W vom Typ M , in welcher der Erzeuger r_i ausgelassen ist, so ist

$$r_1 \cdots r_n W_n(A_n)$$

die Linksnebenklasse, die das längste Element enthält. Da $W_n(A_n)$ isomorph zu $W(A_{n-1})$ ist, folgt die Behauptung durch Induktion.

Für $W(D_{2m+1})$ findet man

$$r_1 r_2 \cdots r_{2m-1} r_{2m+1} r_{2m} r_{2m-1} \cdots r_2 r_1 W_1(D_{2m+1}).$$

Aus der Isomorphie $W_1(D_{2m+1}) \cong W(D_{2m})$ folgt die Behauptung.

Für $W(E_6)$ findet man

$$r_1 \cdots r_6 r_3 r_4 r_2 r_3 r_6 r_1 \cdots r_5 W_5(E_6).$$

Da $W_5(E_6) \cong W(D_5)$ ist, folgt die Behauptung.

Bemerkung:

Ist insbesondere Γ ein Gebäude mit endlichem BN -Paar, so ist (vgl. [8]):

$$\text{rg}(\mathcal{A}_{n-1}^R(\Gamma)) = |B : B \cap w_0 B w_0^{-1}|.$$

Beweis:

Ist G eine Gruppe mit BN -Paar, d.h. $G_F = B$ und $G_\Sigma = N$ für eine Kammer F und ein Apartment Σ , das F enthält, so ist $\mathcal{A}_F = |B : B \cap N|$, denn G_F permutiert \mathcal{A}_F , und aus $b(\Sigma) = b'(\Sigma)$ für $b, b' \in B$ folgt $b^{-1}b' \in B \cap N$. Es sei E die Kammer von Σ mit $w_0(F) = E$. Dann folgt aus $b \in B$ mit $b(E) = E$, dass alle Kammern in Σ fest bleiben, also $b \in B \cap N$. Andererseits ist b genau dann in $B \cap N$, wenn $b w_0(F) = b(E) = E = w_0(F)$, also $w_0^{-1} b w_0 \in B$. Folglich ist $B \cap N = B \cap w_0 B w_0^{-1}$.

4. Der p-Rang von (0,1)-Matrizen

In diesem Abschnitt sind alle Geometrien partielle lineare Räume, also Geometrien vom Rang 2. Ferner wird hier die Bezeichnung Steinberg-Modul für den ersten Homologiemodul verwendet. Die trivialen Sonderfälle der semidünnen Geometrien werden als bekannt vorausgesetzt, da hier stets $\dim_k(\mathbf{St}) \leq 1$ für jeden Körper k gilt.

Mit der Inzidenzrelation einer Geometrie ist in natürlicher Weise eine (0,1)-Matrix verbunden.

Definition 4.1:

Es sei $\Gamma = (S_1, S_2, I, t)$ eine Geometrie, und $S := S_1 \cup S_2$. Es seien $x, y \in S$. Durch

$$(\Lambda(x))(y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x I y, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist eine Abbildung, **Inzidenzabbildung** genannt, definiert.

$$\Lambda: \begin{cases} S & \rightarrow & \text{Abb}(S, \mathbb{Z}) \\ x & \mapsto & \Lambda(x) \end{cases} \quad \Lambda(x): \begin{cases} S & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ y & \mapsto & (\Lambda(x))(y) \end{cases}$$

Definition 4.2:

Es seien $V_0 := \langle A \mid A \in S_1 \rangle$, $V_1 := \langle a \mid a \in S_2 \rangle$, $C_2 := \langle [A, a] \mid A \in S_1, a \in S_2, A I a \rangle$ die durch die Punkte, Geraden und geordneten Kammern erzeugten \mathbb{Z} -Modulen von Γ .

Es sei Θ definiert durch

$$\Theta: \begin{cases} V_0 \otimes V_1 & \rightarrow & C_2 \\ A \otimes a & \mapsto & \Lambda(A)(a) \cdot [A, a]. \end{cases}$$

Dann induziert Θ eine lineare Abbildung

$$\Lambda_0: \begin{cases} V_0 & \rightarrow & V_1 \\ A & \mapsto & \sum_{a I A} a, \end{cases} \quad \text{und} \quad \Lambda_1: \begin{cases} V_1 & \rightarrow & V_0 \\ a & \mapsto & \sum_{A I a} A. \end{cases}$$

Definiere

$$\begin{aligned} U_0 &:= \langle \Lambda_1(a) \mid a \in S_2 \rangle & \text{und} & & W_0 &:= \langle \Lambda_1(a) - \Lambda_1(b) \mid a, b \in S_2 \rangle, \\ U_1 &:= \langle \Lambda_0(A) \mid A \in S_1 \rangle & \text{und} & & W_1 &:= \langle \Lambda_0(A) - \Lambda_0(B) \mid A, B \in S_1 \rangle. \end{aligned}$$

Beachte $W_0 \subset U_0 \subset V_0$ und $W_1 \subset U_1 \subset V_1$.

Ist k ein Körper, so werden alle \mathbb{Z} -Moduln zu k -Vektorräumen durch das Tensorprodukt mit $-\otimes_{\mathbb{Z}} k$. Folglich ist $\dim_k(\mathbf{St} \otimes_{\mathbb{Z}} k) = \text{rg}(\mathbf{St})$. Die Gleichheit folgt auch aus Theorem 3.18. Wir bezeichnen daher $\dim_k(\mathbf{St} \otimes_{\mathbb{Z}} k)$ kurz mit $\dim_k(\mathbf{St})$. Daher genügt es, die \mathbb{Z} -Homologiemoduln zu bestimmen.

Lemma 4.3:

Es sei M die Inzidenzmatrix.

$$(1) \quad \text{rg}_k(M) = \dim_k(U_0) = \dim_k(U_1).$$

(2) Ist $c \in \mathcal{St}$ ein einfacher Zyklus und Γ nicht dünn, dann hat c ein Urbild in $W_0 \otimes W_1$.

Beweis:

Der erste Teil folgt der Tatsache, dass der Spaltenrang und der Zeilenrang einer Matrix über einem Körper gleich sind. Im zweiten Teil sei $c = \sum_{i=1}^n ([A_{i+1}, a_i] - [A_i, a_i])$ ein einfacher Zyklus in \mathcal{St} , wobei $A_{n+1} = A_1$. Es sei X ein von A_1, \dots, A_n verschiedener Punkt. Dieser existiert, da Γ nicht dünn ist. Dann definiert

$$C := \sum_{i=1}^n [(\Lambda_1(a_i) - \Lambda_1(a_{i-1})) \otimes (\Lambda_0(A_i) - \Lambda_0(X))],$$

wobei $a_0 = a_n$ ein Urbild von c in $W_0 \otimes W_1$ unter der Einschränkung von Θ auf $W_0 \otimes W_1$. Hierzu ist zu beachten, dass

$$\sum_{i=1}^n [(\Lambda_1(a_i) - \Lambda_1(a_{i-1})) \otimes \Lambda_0(X)] = 0.$$

Also ist

$$C = \sum_{i=1}^n [(\Lambda_1(a_i) - \Lambda_1(a_{i-1})) \otimes \Lambda_0(A_i)].$$

Wir erhalten:

$$\alpha := \Theta((\Lambda_1(a_1) - \Lambda_1(a_n)) \otimes \Lambda_0(A_1)) = \sum_{\substack{B I a_1 \\ B \neq A_1}} [B, a_1] - \sum_{\substack{C I a_1 \\ C \neq A_1}} [C, a_n].$$

Genauso gilt:

$$\beta := \Theta((\Lambda_1(a_2) - \Lambda_1(a_1)) \otimes \Lambda_0(A_2)) = \sum_{\substack{D I a_1 \\ D \neq A_2}} [D, a_2] - \sum_{\substack{E I a_1 \\ E \neq A_2}} [E, a_1].$$

Daraus folgt:

$$\alpha + \beta = [A_2, a_1] - [A_1, a_1] + \sum_{\substack{D I a_1 \\ D \neq A_2}} [D, a_2] - \sum_{\substack{C I a_1 \\ C \neq A_1}} [C, a_n].$$

Jedes n -Eck ist aber geschlossen. Damit ist alles bewiesen.

Korollar 4.4:

Ist $\dim_k(U_i / W_i) = l_i$ für $i \in \{0, 1\}$, dann

$$\begin{aligned} \dim_k(\mathcal{St}) &\leq \dim_k(W_0 \otimes W_1) \leq \dim_k(W_0) \dim_k(W_1) \\ &= (\dim_k(U_0) - l_0) (\dim_k(U_1) - l_1) \\ &= (\text{rg}_k(M) - l_0) (\text{rg}_k(M) - l_1). \end{aligned}$$

Damit ist folgendes Theorem bewiesen:

Theorem 4.5:

Es sei Γ ein partieller linearer Raum. Es sei k ein Körper und M die Inzidenzmatrix von Γ . Dann gilt:

$$\text{rg}_k(M) \geq \sqrt{\dim_k(\mathcal{St})}.$$

Ferner berechnet sich $\dim_k(\mathcal{St})$ mit Hilfe der Hopfschen Spurformel zu

$$\dim_k(\mathcal{St}) = |\mathbf{F}_2| - |S_1| - |S_2| + 1.$$

Bestimmen wir nun Basen der Steinberg-Moduln.**A. Partielle Lineare Räume**

Es sei daran erinnert, dass ein ordinäres n -Eck eine dünne Teilgeometrie in einer Geometrie Γ ist. Ferner sei erinnert, dass ein Element $c \in \mathcal{St}$ **einfacher n -Zyklus** genannt wird, wenn der Zyklus durch ein ordinäres n -Eck erzeugt wird. Ist dabei n nicht von Bedeutung, so sprechen wir kurz von einem **einfachen Zyklus**.

Proposition 4.6:

Es sei Γ eine partielle lineare Geometrie und A eine geordnete Kammer.

1. Der \mathbb{Z} -Homologiemodul \mathcal{St} wird von einfachen Zyklen erzeugt.
2. Es sei Z_n die Menge aller Zyklen, die durch ordinäre n -Ecke erzeugt werden, die A enthalten. Es sei m der maximale dünne Abstand in Γ bezüglich A . Zu jeder von A verschiedener Kammer X mit $z(X) \neq 0$ für ein $z \in \mathcal{St}$ existiere ein $n \leq m$ und ein $c \in Z_n$, so dass $c(X) \neq 0$. Dann wird \mathcal{St} sogar durch die Menge $Z := \bigcup_{n \leq m} Z_n$ erzeugt.

Beweis:

Es sei erinnert, dass ein Zyklus $c \in \mathcal{St}$ eine Teilgeometrie $\Gamma(c)$, eventuell unzusammenhängend, durch die Punkte und Geraden in c induziert.

Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es ein Gegenbeispiel $c \in \mathcal{St}$ mit einer minimalen Anzahl von Kammern in $\Gamma(c)$. Es sei B eine Kammer in $\Gamma(c)$. Da Γ endlich ist, existiert ein ordinäres n -Eck $\Sigma \subset \Gamma(c)$, das B enthält. Dieses existiert, aufgrund der Randabbildung, da jede geordnete Kammer eine geordnete Nachbarkammer haben muss. Es sei c_1 der durch Σ induzierte Zyklus. Dieser existiert nach Proposition 2.14. Dann ist $c^1 := c - c(B)c_1$ auch ein minimales Gegenbeispiel, und $\Gamma(c^1)$ ist eine echte Teilgeometrie von $\Gamma(c)$. Dies widerspricht der Voraussetzung, und der erste Teil ist bewiesen.

Nach dem ersten Teil ist nur zu zeigen, dass jeder einfache Zyklus $c \in \mathcal{St}$ eine Linearkombination von Elementen in Z ist.

Angenommen, es gibt ein Gegenbeispiel $c \in \mathbf{St}$. Dann darf $c(A) \neq 0$ angenommen werden. Ansonsten addieren wir einen einfachen Zyklus c' mit $c'(A) \neq 0$ und $c + c'$ ist auch ein Gegenbeispiel. Ferner sei unter allen Gegenbeispielen der Durchmesser $D(\Gamma(c)) = q > m$ minimal. Es sei F eine Kammer in $\Gamma(c)$ mit $d_{\Gamma(c)}(A, F) = q$. Nach Voraussetzung existiert ein ordinäres n_1 -Eck Σ_1 mit $d_{\Sigma_1}(A, F) = n_1 < q$. Es seien \mathbf{G} und \mathbf{G}' die Galerien von A nach F in $\Gamma(c)$ vom Typ $f_{\mathbf{G}} = 21 \cdots$ und $f_{\mathbf{G}'} = 12 \cdots$. Entsprechend seien \mathbf{H} und \mathbf{H}' die Galerien von A nach F in Σ_1 vom Typ $f_{\mathbf{H}} = 21 \cdots$ und $f_{\mathbf{H}'} = 12 \cdots$. Die Galerien \mathbf{G} und \mathbf{H}' liefern ein n_2 -Eck mit $n_2 < q$ und die Galerien \mathbf{H} und \mathbf{G}' liefern ein n_3 -Eck mit $n_3 < q$. Es seien nun c_1, c_2 und c_3 die entsprechenden Zyklen. Dann ist $\varepsilon \cdot c = c_2 + c_3 - c_1$, wobei $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Folglich kann c kein minimales Gegenbeispiel gewesen sein.

B. Partialgeometrien

Es sei daran erinnert, dass unsere Definition von Partialgeometrien keine Parameter im Sinne der Definition 1.24 besitzen.

Lemma 4.7:

Es sei Γ eine Partialgeometrie mit Parametern X, Y . Dann gilt:

$$(u+1)|S_1| = (X+1)(XY+u+1), \quad (u+1)|S_2| = (Y+1)(XY+u+1)$$

und

$$(u+1)|F_2| = (X+1)(Y+1)(XY+u+1).$$

Beweis:

Es sei $[P, a]$ eine fest gewählte Kammer. Es gibt XY Punkte, die mit P verbunden sind. Zu jedem Punkt $Q \in a$, $Q \neq P$ gibt es Y von a verschiedene Geraden durch Q . Auf jeder dieser Geraden liegen $X - u$ Punkte, die nicht mit P verbunden sind. Zählen wir diese Punkte, so ist zu überlegen, wie oft jeder Punkt gezählt wird, der nicht mit P verbunden ist. Sei also R ein Punkt, der nicht mit P verbunden ist. Dann treffen genau $u + 1$ Geraden durch R die Gerade a in von P verschiedenen Punkten. Folglich wird R genau $(u + 1)$ -mal gezählt. Somit gibt es $\frac{XY(X-u)}{u+1}$ Punkte, die nicht mit P verbunden sind. Hieraus folgt die Anzahl der Punkte. Die Anzahl der Kammern folgt aus $|S_1|(Y+1) = |S_2|(X+1)$. Hieraus erhalten wir die Anzahl der Geraden.

Lemma 4.8:

Eine Partialgeometrie ist dünn orientierbar bezüglich jeder Kammer.

Beweis:

Es sei K eine fest gewählte Kammer. Zu jeder anderen Kammer finden wir ein Dreieck oder Viereck, das beide enthält.

Bemerkung:

Beachte, dass es keine globale Orientierung geben muss! Man betrachte den vollständigen Graphen mit 4 Punkten.

Theorem 4.9: (Basissatz)

Es sei Γ eine Partialgeometrie und $K = [A, a]$ eine Kammer.

1. Nach Proposition 3.12 1. ist eine \mathbb{Z} -Basis von \mathbf{St} bezüglich der Kammer $[A, a]$ durch die induzierenden n -Ecke gegeben.

Dreiecke: Jedes Dreieck, das $[A, a]$ enthält.

Vierecke: Es seien $\{a_\omega | \omega \in \Omega\}$ die Menge der Geraden, welche die Gerade a passieren. Auf jeder Geraden a_ω wähle man einen festen Punkt A_ω , der mit A verbunden ist. Zu jeder von $[A_\omega, a_\omega]$ verschiedenen Kammer $[C_{\omega\lambda}, a_\omega]$, $\lambda \in \Lambda_\omega$, wobei $C_{\omega\lambda}$ mit A verbunden ist, wähle genau ein Viereck $V_{\omega\lambda}$, das $[A, a]$, $[A_\omega, a_\omega]$ und $[C_{\omega\lambda}, a_\omega]$ enthält mit $d_{V_{\omega\lambda}}([A, a], [C_{\omega\lambda}, a_\omega]) = 4$.

Zu jedem Punkt $N_{\omega\tau}$, $\tau \in T_\omega$ der nicht mit A verbunden ist, wähle eine feste Gerade x_τ , die a trifft. Wähle zu jeder von $[N_{\omega\tau}, x_\tau]$ verschiedenen Kammer $[N_{\omega\tau}, a_\omega]$ ein Viereck $W_{\omega\tau}$, das $[A, a]$, $[N_{\omega\tau}, a_\omega]$ und $[N_{\omega\tau}, x_\tau]$ enthält. Dann ist $d_{W_{\omega\tau}}([A, a], [N_{\omega\tau}, a_\omega]) = 4$. Zusätzlich wähle zu jedem Punkt $N_{\omega\tau}$ genau eine Kammer $[N_{\omega\tau}, a_{\omega_0}]$ und dazu u Nachbarkammern $[N_{\omega\tau}, b_v]$. Ferner ein Viereck U_v , das $[A, a]$, $[N_{\omega\tau}, a_{\omega_0}]$ und $[N_{\omega\tau}, b_v]$ enthält.

Sei $v := |S_1|$ die Anzahl der Punkte und $|z|$ die Anzahl der Punkte die mit der Geraden z inzidieren. Damit gilt:

$$\text{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{St}) = (v - |a|)u + \sum_{j \in J} (|a_j| - 1),$$

Besitzt Γ die Parameter X und Y , so ist

$$\text{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{St}) = \frac{XY(XY + u)}{u + 1}.$$

2. Ein Repräsentantensystem eines freien Erzeugendensystems des Kohomologiemoduls $\mathcal{H}_R^1(\Gamma)$ ist durch die Kammern $[D_q, d_q]$, $q \in Q$, $[C_{\omega\lambda}, a_\omega]$, $\lambda \in \Lambda_\omega$, $\omega \in \Omega$ und $[N_{\omega\tau}, a_\omega]$, $\tau \in T_\omega$ sowie $[N_{\omega_0\tau}, b_v]$, $1 \leq v \leq u$ gegeben. Hierbei sind $[D_q, d_q]$, $q \in Q$ alle Kammern, die den dünnen Abstand drei zur Kammer $[A, a]$ haben.

Beweis:

Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit der angegebenen einfachen Zyklen. Es sei $K := [A, a]$. Es seien

$$\begin{aligned}
D &:= \{c_l \mid c_l \text{ ist durch ein Dreieck induziert mit } c_l(K) = 1\} \\
V_1 &:= \{c_{\omega\lambda} \mid c_{\omega\lambda} \text{ ist durch } V_{\omega\lambda} \text{ induziert mit } c_{\omega\lambda}(K) = 1\} \\
V_2 &:= \{c_{\omega\tau} \mid c_{\omega\tau} \text{ ist durch } W_{\omega\tau} \text{ induziert mit } c_{\omega\tau}(K) = 1\} \\
V_3 &:= \{c_v \mid c_v \text{ ist durch } U_v \text{ induziert mit } c_v(K) = 1\}
\end{aligned}$$

die Mengen der korrespondierenden einfachen Zyklen. Der Ansatz

$$(*) \quad c := \sum_{q \in Q} e_q c_q + \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \lambda \in \Lambda_\omega}} b_{\omega\lambda} c_{\omega\lambda} + \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \tau \in T_\omega}} b_{\omega\tau} c_{\omega\tau} + \sum_{v=1}^u s_v c_v = 0$$

liefert $0 = c([C_{\omega\lambda}, a_\omega]) = b_{\omega\lambda}$, $0 = c([N_{\omega_0\tau}, b_v]) = -s_v$, $0 = c([N_{\omega\tau}, a_\omega]) = b_{\omega\tau}$ und schließlich $0 = c(F_l) = -e_l$ für jede Kammer F_l vom Abstand drei in c_l . Folglich sind die einfachen 3- und 4-Zyklen linear unabhängig.

Es bleibt zu zeigen: Die Menge dieser einfachen Zyklen erzeugen den Steinberg-Modul.

Nach Proposition 4.6 ist nur zu zeigen, dass jeder einfache 4-Zyklus c mit $c(K) = 1$ eine \mathbb{Z} -Linearkombination der angegebenen Elemente ist. Sei c ein solcher 4-Zyklus $c \notin V_1 \cup V_2$, der auf einer Kammer $[N_{\omega\tau}, a_\omega]$ oder $[C_{\omega\lambda}, a_\omega]$ nicht verschwindet. Folgende Konstellationen können auftreten.



In allen Fällen ist die Behauptung leicht zu zeigen.

Damit ist der erste Teil von **I**. bewiesen.

Es seien nun $v_A := |\{Q \mid \text{Es gibt eine Gerade } g \text{ mit } QI g I A \text{ und } Q \neq A\}|$ die Anzahl der Punkte, die mit A verbunden sind und $d_A := |\{P \mid P \text{ und } A \text{ haben keine gemeinsame Gerade}\}|$ die Anzahl der unverbundenen Punkte. Dann ist die Anzahl der Dreiecke gleich $u \cdot v_A$. Auf jeder Geraden a_ω finden wir $|a_\omega| - 1$ aus $V_1 \cup V_2$ und $u \cdot d_A$ Vierecke aus V_3 . Wir erhalten mit $v_A + d_A = v - |a|$ die Gleichung

$$uv_A + ud_A + \sum_{\omega \in \Omega} (|a_\omega| - 1) = u(v - |a|) + \sum_{\omega \in \Omega} (|a_\omega| - 1).$$

Besitzt die Partialgeometrie Parameter X und Y , so ist $|a_\omega| = X + 1$, $v - |a| = \frac{XY(X+1)}{u+1}$ und $|\Omega| = \frac{XY(Y-u)}{u+1}$. Dies liefert $u \cdot \frac{XY(X+1)}{u+1} + X \cdot \frac{XY(Y-u)}{u+1} = \frac{XY(XY+u)}{u+1}$.

Wir beweisen 2.: Es seien K_1, \dots, K_t die angegebenen geordneten Kammern. Dann folgt wie in (*) aus $\sum_{i=1}^t r_i K_i = \delta^0(x)$ für ein $x \in C_0(\Gamma)$ auch $r_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq t$. Wir haben noch zu zeigen, dass bei Hinzunahme einer weiteren geordneten Kammer eine nicht triviale Gleichung modulo eines Korandes entsteht. Für die geordnete Kammer $[A_\omega, a_\omega]$ folgt die Behauptung aus 2.26. Es sei nun B ein Punkt auf der Geraden a_ω und b die A und B verbindende Gerade. Dann ist nach 2.26 $\delta^0(B) = -\sum_{g \perp B} [B, g]$. Die geordnete $[B, g] = [A_\omega, a_\omega]$ wird durch $\delta^0(a_\omega) - \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} [C_{\omega\lambda}, a_\omega]$ ersetzt. Schneidet g die Gerade a , so ist $[B, g]$ ein angegebener Repräsentant. Folglich ist $[B, g]$ eine Linearkombination der gegebenen Repräsentanten modulo eines Korandes. Es sei nun X ein Punkt auf der Geraden a . Jede Gerade x durch X liefert eine geordnete Kammer $[X, x]$. Nach 2.26 gilt wieder $\delta^0(x) = \sum_{Y \perp x} [Y, x]$. Ist $x \neq a$, so sind wir fertig. Sei also $x = a$. Dann ist aber $[X, a]$ wieder eine Linearkombination der angegebenen Repräsentanten modulo eines Korandes.

Bemerkung:

Die konstruierten \mathbb{Z} -Basen sind nach Proposition 3.11 insbesondere R -Basen für jeden Ring R , da sie nur von den n -Ecken abhängen.

Hieraus ergeben sich einige Folgerungen. (vgl. 1.29.)

Korollar 4.10:

Es sei Γ eine Partialgeometrie. Dann erhalten wir für den Rang des Steinberg-Moduls folgende Ränge.

- | | |
|---|---|
| 1. Verallgemeinerte Vierecke ($u = 0$): | $\text{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{St}) = \sum_{j \in J} (a_j - 1) = X^2 Y^2,$ |
| 2. Bruck-Netze ($u = X - 1$): | $\text{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{St}) = Y(XY + X - 1)$ |
| oder Bruck-Netze ($X = Y - 1$): | $\text{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{St}) = X(XY + Y - 1),$ |
| 3. Lineare Räume ($u = X$): | $\text{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{St}) = \frac{X^2 Y(Y + 1)}{X + 1},$ |
| 4. Projektive Ebene ($X = Y$): | $\text{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{St}) = X^3,$ |
| 5. Affine Ebene ($u = X, Y = X + 1$): | $\text{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{St}) = X^2(X + 2),$ |
| 6. Unital ($u = X, Y = X^2 - 1$): | $\text{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{St}) = X^4(X - 1),$ |
| 7. Vollständiger Graph ($u = X = 1$): | $\text{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{St}) = \frac{1}{2} Y(Y + 1).$ |

Satz 4.11: [18]

Es sei Γ eine Partial-Geometrie mit den Parametern X, Y und u . Es sei die Inzidenzabbildung α definiert durch $\alpha := \gamma \circ \pi$, wobei $\pi(A) := \sum_{g \perp A} g$ und $\gamma(g) := \sum_{A \perp g} A$ für $A \in S_1, g \in S_2$. Dann hat α die Eigenwerte $0, X + Y - u$ und $(X + 1)(Y + 1)$. Die zugehörigen Eigenräume haben folgende Dimensionen.

$$\dim_{\mathbf{K}} E_{\alpha}(0) = \frac{(XY + u + 1)(X - u)X}{(X + Y - u)(u + 1)}, \quad \dim_{\mathbf{K}} E_{\alpha}(X + Y - u) = \frac{(X + 1)(Y + 1)XY}{(X + Y - u)(u + 1)},$$

$$\dim_{\mathbf{K}} E_{\alpha}((X + 1)(Y + 1)) = 1$$

Beweis:

Spur-Dimensionssatz:

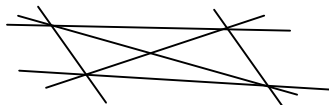
Es sei μ_{α} das Minimalpolynom. Ferner sei $(X - \lambda)^r p_{\lambda} = \mu_{\alpha}$ mit $p_{\lambda}(\lambda) \neq 0$. Bezeichnet $E_{\alpha}(\lambda)$ den verallgemeinerten Eigenraum von α bezüglich des Eigenwertes λ , so gilt die Beziehung

$$\text{spur}(p_{\lambda}(\alpha)) = p_{\lambda}(\lambda) \cdot \dim_{\mathbf{K}}(E_{\alpha}(\lambda)).$$

Hierbei gilt: $\text{spur}(p_{\lambda}(\alpha)) = \xi_A \cdot \dim_{\mathbf{K}} E \wedge \dim_{\mathbf{K}} E = |\Omega_1|$, da wir nur Punkträume betrachten. ξ_A ist die Auswertung von $p_{\lambda}(\alpha)$ auf den Punkt A .

B. Lineare Räume

Es sei daran erinnert, dass in einem linearen Raum zu je zwei verschiedenen Punkten genau eine Gerade existiert. Hat der lineare Raum keine Parameter, so unterscheidet er sich von Partialgeometrien, wie man am Beispiel mit fünf Punkten erkennt.



Lemma 4.12:

Es sei Γ ein linearer Raum mit Parametern X und Y . Es sei S_1 die Menge der Punkte, S_2 die Menge der Geraden und F_2 die Menge der Kammern in Γ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |S_1| &= XY + X + 1, \\ (X + 1)|S_2| &= (XY + X + 1)(Y + 1), \\ |F_2| &= (XY + X + 1)(Y + 1). \end{aligned}$$

Ferner gelten die Teilbarkeiten $Y \geq X$

$$X + 1 \mid Y(Y + 1), \quad X + 1 \mid Y(Y - X) \quad \text{und} \quad X + 1 \mid Y(XY - 1)$$

Beweis:

Folgt sofort aus Partialgeometrien mit $u = X$.

Lemma 4.13:

Jeder lineare Raum ist dünn orientierbar bezüglich jeder Kammer.

Beweis:

Es sei F eine Kammer. Jede von F verschiedene Kammer liegt in einem Dreieck oder Viereck.

Theorem 4.14: (Basissatz)

Es sei Γ ein linearer Raum.

1. Dann ist eine \mathbb{Z} -Basis von \mathbf{St} bezüglich einer Kammer $[A, a]$ wie folgt gegeben:

Dreiecke: Jedes Dreieck, das $[A, a]$ enthält.

Vierecke: Es seien $\{a_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ die Menge der Geraden, welche die Gerade a passieren. Auf jeder Geraden a_ω wähle einen festen Punkt A_ω . Zu jeder von $[A_\omega, a_\omega]$ verschiedenen Kammer $[C_{\omega\lambda}, a_\omega]$, $\lambda \in \Lambda_\omega$ wähle genau ein Viereck $V_{\omega\lambda}$, das $[A, a]$, $[A_\omega, a_\omega]$ und $[C_{\omega\lambda}, a_\omega]$ enthält mit $d_{V_{\omega\lambda}}([A, a], [C_{\omega\lambda}, a_\omega]) = 4$.

Sei ν die Anzahl aller Punkte von Γ und $|b|$ die Anzahl der Punkte die mit b inzidieren. Damit gilt:

$$\dim_k(\mathbf{St}) = (\nu - |a|)(|a| - 1) + \sum_{\omega \in \Omega} (|a_\omega| - 1).$$

Besitzt Γ die Parameter X und Y , so ist

$$\dim_k(\mathbf{St}) = \frac{X^2 Y (Y + 1)}{X + 1}.$$

2. Es seien $[D_q, d_q]$, $q \in Q$ alle Kammern, die den dünnen Abstand drei zur Kammer $[A, a]$ haben. Ein Repräsentantensystem eines freien Erzeugendensystems des Kohomologiemoduls $\mathcal{H}_R^1(\Gamma)$ ist durch die Kammern $[D_q, d_q]$, $q \in Q$, $[C_{\omega\lambda}, a_\omega]$, $\lambda \in \Lambda_\omega$, $\omega \in \Omega$ gegeben.

Beweis:

Klar! Beachte, dass es keine unverbundenen Punkte gibt und $u = |a| - 1$ für die Gerade a gilt. Der Beweis ist nun wie in 4.9 zu führen.

Bemerkungen:

1. Die Beweise zur Bestimmung des Ranges des Steinberg-Moduls sind konstruktiv. Sie können sofort auf beliebige Geometrien vom Rang zwei verallgemeinert werden. Insbesondere auf Graphen ohne Schlingen. Er gibt darüber hinaus die Möglichkeit die Anzahl und die zu wählenden Maschen für die Erfüllung der kirchhoffschen Gesetze zu bestimmen. Natürlich auch der Bettizahlen.
2. Eine erste Abschätzung dieser Art ist für projektive Ebenen von E.S. Lander [23] gegeben worden:

$$\text{rg}(M) \geq 3n - 2,$$

wobei n die Ordnung der projektiven Ebene ist.

Dieses Ergebnis wurde wesentlich durch A.A. Bruen und U. Ott [3] auf lineare Räume verallgemeinert und verbessert:

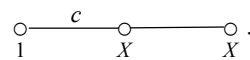
$$(\text{rg}_p(M) - 1)^2 \geq (\nu - |a|)(|a| - 1),$$

wobei v die Anzahl der Punkte und $|a|$ die Anzahl der Punkte auf der Geraden a bezeichnet.

3. Bemerkenswert scheint zu sein, dass die Vierecke in der Konstruktion nicht eindeutig sind.
4. Die Ungleichung in Theorem 4.5 ist in ganzen Zahlen nicht zu verbessern. Dazu sei Γ der vollständige Graph mit vier Punkten. Dann ist $\text{rg}_k(M) = 3$, wenn die Charakteristik des Körpers k zwei ist. Außerdem gilt hier sogar $\text{rg}_k(M) \geq \sqrt{\dim(\mathbf{St})} + 1$, denn $l_0 = l_1 = 1$ in Korollar 4.4. Daraus folgt: $\text{rg}_k(M) \geq \sqrt{3} + 1 > 2$.

Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ist auch die Dimension von $\ker(\Theta|_{U_0 \otimes U_1})$ in Abhängigkeit der Charakteristik des Körpers k interessant.

5. Das Theorem wird falsch für Geometrien, die nicht partiell linear sind, sogar dann, wenn der Punktschatten jeder Geraden eindeutig ist. Dazu sei Γ die erweiterte projektive Ebene der Ordnung $X = 2$, betrachtet als Geometrie vom Rang zwei. Diese Geometrie besteht aus 8 Punkten und 14 Geraden und ist vom Typ (vgl. Lemma 5.2.)



Bezeichne $\mathbf{1}$ die Matrix, die an jeder Stelle eine 1 hat. Eine Inzidenzmatrix M ist wie folgt gegeben:

$$M^t = (A|\mathbf{1} - A), \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist $\text{rg}_k(M) = 4$, wenn die Charakteristik von k zwei ist. Andererseits folgt aus Theorem 3.15 $\dim_k(\mathbf{St}) = 35$.

Ein positives Ergebnis für die Codierungstheorie soll festgehalten werden.

Korollar 4.15:

Es sei \mathbf{P} ein projektiver Raum der Dimension $n \geq 2$ über dem endlichen Körper $k = \text{GF}(q)$. Dann bilden die Punkte und Geraden einen linearen Raum Γ . Es bezeichne \mathbf{St} den Steinberg-Modul von Γ . Dann gilt:

$$\dim_k(\mathbf{St}) = q^3 \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)}{(q^2 - 1)(q - 1)}.$$

Beweis:

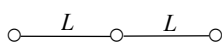
Dies folgt aus Proposition 5.9 mit $X = q$ und $Y + 1 = \sum_{i=0}^{n-1} q^i$.

5. Lineare Räume der Dimension drei

In diesem letzten Abschnitt geben wir eine R -Basis für lineare Räume der Dimension drei an. Dazu sind einige kombinatorische Vorbereitungen zu treffen, die unter anderem die Nichtexistenz einiger linearer Räume der Dimension drei liefern.

Definition 5.1:

Eine Geometrie $\Gamma = (S; I)$ vom Rang drei und Buekenhout-Tits-Typ



heißt ein *linearer Raum der Dimension drei*.

Lemma 5.2:

Es sei $\Gamma = (S_1, S_2, S_3, I, t)$ ein linearer Raum der Dimension drei.

1. Je zwei verschiedene Punkte sind durch genau eine Gerade verbunden.
2. Je zwei verschiedene Ebenen schneiden sich höchstens in einer Geraden.
3. Gehören zwei verschiedene Punkte zwei verschiedenen Ebenen an, so schneiden sich die Ebenen in der Verbindungsgeraden.
4. Besitzt Γ Parameter X, Y und Z , so gilt:

$$\begin{aligned} |S_1| &= XYZ + XY + X + 1, \\ |S_2| &= \frac{(XYZ + XY + X + 1)(YZ + Y + 1)}{X + 1}, \\ |S_3| &= \frac{(XYZ + XY + X + 1)(YZ + Y + 1)(Z + 1)}{(XY + X + 1)(Y + 1)}, \\ |F_3| &= (XYZ + XY + X + 1)(YZ + Y + 1)(Z + 1) \\ &\text{und } X \leq Y \leq Z. \end{aligned}$$

Beweis: (vgl. [4])

1. Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Da die Geometrie zusammenhängend ist, gibt es einen Weg $A I a_1 I A_1 I a_2 I A_2 \dots I B$, der A mit B verbindet. Es genügt zu zeigen, dass A mit A_2 durch eine Gerade verbunden ist. Γ_{A_1} ist ein linearer Raum der Dimension zwei, in dem je zwei Geraden durch genau eine Ebene verbunden sind. Folglich gibt es eine Ebene α , die a_1 und a_2 enthält. Da Γ_g für jede Gerade ein verallgemeinertes Zweieck ist, enthält die Ebene α auch die Punkte A und A_3 . Die Ebene α ist ein linearer Raum der Dimension zwei. Folglich sind A und A_1 durch eine Gerade verbunden. Die allgemeine Aussage folgt nun mit Induktion.

2. Es seien α und β zwei Ebenen, die sich in der Geraden a und in einem Punkt A , der nicht mit a inzidiert, treffen. Es sei B ein Punkt auf a . b_α beziehungsweise b_β sei die Verbindungsgerade von A und B in der Ebene α beziehungsweise β . Die in dem Punkt A abgeleitete Geometrie Γ_A ist ein linearer Raum der Dimension drei. Es gibt daher eine Ebene γ , die b_α und b_β enthält. Wie unter 1. gezeigt, enthält γ auch den Punkt B . Nach Voraussetzung ist die Verbindungsgerade in einem

linearen Raum der Dimension zwei eindeutig. Bezeichne b die Gerade in γ , die A mit B verbindet, so folgt $b_\alpha = b_\beta = b$. In Γ_B ist die Ebene, die a und b enthält, aber eindeutig bestimmt. Daraus folgt $\alpha = \beta$.

3. Es seien A und B zwei verschiedene Punkte, die mit den Ebenen α und β inzidieren. Sind b_α und b_β die Verbindungsgeraden in den zugehörigen Ebenen, so folgt wie unter 2. gezeigt $b_\alpha = b_\beta$.

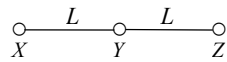
4. Es sei A ein Punkt und a eine Gerade in Γ . In Γ_A gibt es $YZ + Y + 1$ Geraden, und in Γ_a gibt es $X + 1$ Punkte. Nach 1. sind je zwei Punkte durch eine Gerade verbunden. Folglich existieren $X(YZ + Y + 1)$ von A verschiedene Punkte. Da jeder Punkt gleichberechtigt ist, berechnet sich die Anzahl der Kammern aus der Anzahl der Kammern in Γ_A multipliziert mit der Anzahl der Punkte. Mit Lemma 5.7 folgt die Behauptung.

Bemerkung:

Die Aussagen 2. und 3. bedeuten, dass zu je drei verschiedenen Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, genau eine Ebene existiert, die diese enthält.

Lemma 5.3:

Es sei Γ eine Geometrie vom Typ



Es sei α eine Ebene in Γ .

1. Die Anzahl der von α verschiedenen Ebenen, die α in einer Geraden schneiden, ist

$$R = \frac{Z(XY + X + 1)(Y + 1)}{X + 1}$$

2. Es berühren

$$S = \frac{YZ(Z - Y)}{Y + 1}$$

Ebenen die Ebene α in genau einem Punkt.

3. Es gibt genau

$$T = XYZ \left[\frac{(YZ + Y + 1)(Z + 1)}{(XY + X + 1)(Y + 1)} - \frac{Y + 1}{X + 1} - Z + Y \right]$$

Ebenen, die α in keinem Punkt treffen.

Beweis:

1. Nach Lemma 5.7 sind

$$\frac{(XY + X + 1)(Y + 1)}{X + 1}$$

Geraden in α enthalten. Durch jede Gerade a gehen $Z + 1$ Ebenen, wie Γ_a zeigt.

2. Es sei A ein Punkt. In Γ_A existieren nach Lemma 5.7

$$\frac{(YZ + Y + 1)(Z + 1)}{Y + 1}$$

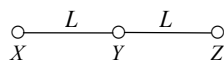
Ebenen. Hiervon schneiden $Z(Y + 1)$ Ebenen die Ebene α in einer Geraden, wie $\Gamma_{\{A, \alpha\}}$ und $\Gamma_{\{A, a\}}$ zeigen, wobei a eine Gerade durch den Punkt A ist.

3. Die Aussage folgt unmittelbar aus $T = |S_3| - R - 1 - (XY + X + 1)S$.

Eine triviale, jedoch wichtige Bedingung ist durch die nichtnegative Anzahl von Ebenen gegeben, die eine feste Ebene nicht treffen.

Lemma 5.4:

Es sei Γ eine Geometrie vom Typ



Es sei Q definiert durch

$$XYZ \cdot Q(X, Y, Z) = T(XY + X + 1)(X + 1)(Y + 1)$$

Dann ist $Q(X, Y, Z) \geq 0$ für Parameter X, Y und Z . Hieraus folgt nun die Nichtexistenz einiger linearer Räume der Dimension drei.

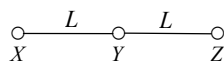
Korollar 6.5:

Es sei Q definiert durch

$$XYZ \cdot Q(X, Y, Z) = T(XY + X + 1)(X + 1)(Y + 1),$$

$$Q(X, Y, Z) = XYZ^2 + YZ^2 + YZ + X^2Y^3 + 2X^2Y^2 + X^2Y - X^2Y^2Z - XY^2Z - 2X^2YZ - XYZ - X^2Z - XZ.$$

Dann existieren keine Geometrien vom Typ



wenn $Q(X, Y, Z) < 0$.

Insbesondere gibt es keine Geometrien vom Typ



mit $X \geq 2$.

Beweis:

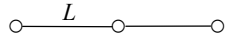
Es ist

$$Q(X, X, Z) = X(X + 1)(Z - X^2 - X)(Z - X).$$

Dass die angegebenen Diagramme nicht existieren, folgt aus Lemma 6.4 durch Einsetzen der Parameter in $P(X, Y, Z)$.

Lemma 5.6:

Es sei Γ eine Geometrie vom Typ



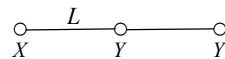
Zu jeder Ebene existiere eine weitere Ebene, wobei die Ebenen keine Punkte gemeinsam haben sollen. Dann gibt es in jeder Ebene eine Parallelklasse von Geraden, die eine Partition der Punkte in dieser Ebene liefert.

Beweis:

Es seien α und β ein solches Ebenenpaar, das keine gemeinsamen Punkte besitzt. Es sei g eine Gerade in der Ebene α . Zu jedem Punkt Q in der Ebene β und P auf der Geraden g gibt es nach 6.2 eine Gerade x , die P mit Q verbindet. Es sei nun ζ eine Ebene, die g und x enthält. Dann trifft die Ebene ζ die Ebene β in einer Geraden h , wie man in Γ_Q feststellt. Es sei R ein Punkt in der Ebene β , der nicht auf der Geraden h liegt. Wieder gibt es eine Gerade y , die P mit R verbindet. Es sei ξ eine Ebene, die g und y enthält. Es sei k die Schnittgerade mit β . Dann haben h und k keine gemeinsamen Punkte, denn nach 6.2 ist eine Ebene durch drei Punkte bereits eindeutig bestimmt. Da je zwei verschiedene Punkte durch genau eine Gerade verbunden sind, folgt die Behauptung.

Theorem 5.7:

Es sei Γ eine Geometrie vom Typ



Dann ist $Y \equiv 0 \pmod{X+1}$, falls $Y \geq X+1$.

Darüber hinaus gilt mit $Y = a(X+1)$:

$$(a^2 - a + 1)(a - 1) \equiv 0 \pmod{aX + 1}.$$

Ist insbesondere $X = 1$, so ist nur $a \in \{1, 2, 5\}$, also $Y \in \{2, 4, 10\}$ möglich (vgl. [10]).

Beweis:

Da $Y > X$, gibt es nach Lemma 5.3 3. zu jeder Ebene α mindestens eine Ebene β , die α nicht trifft: $(XY + X + 1)(X + 1)T = XY^3(Y - X)$. Die Anzahl der Punkte in β beträgt $XY + X + 1$. Auf jeder Geraden liegen $X + 1$ Punkte. Mit Lemma 5.6 ist der erste Teil bewiesen.

Es sei nun $Y = a(X + 1)$. Nach Lemma 5.3 3. ist

$$aX(X + 1)(aX + a)((aX + a)^2 + (aX + a) + 1) \equiv 0 \pmod{aX(X + 1) + X + 1}.$$

Dies liefert

$$-1(-1+a)\left((-1+a)^2 + (-1+a)+1\right) \equiv 0 \pmod{(aX+1)},$$

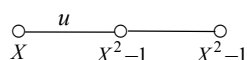
also

$$(a-1)(a^2 - a + 1) \equiv 0 \pmod{(aX+1)}.$$

Für $X=1$ folgt hieraus $6 \equiv 0 \pmod{(a+1)}$.

Korollar 5.8:

Es existiert keine Geometrie vom Typ



für $X > 2$.

Beweis:

Folgt unmittelbar aus $X = a+1$, also $2(2X-1) \equiv 0 \pmod{(X^2 - X + 1)}$.

Es soll nun eine Basis des Steinberg-Moduls konstruiert werden.

Um eine Basis des Steinberg-Moduls konstruieren zu können, muss das Verhalten der verschiedenen Ebenen bezüglich der Fundamentalebene untersucht werden. In jeder Ebene ist eine Basis bereits bekannt. Diese soll auf den ganzen Raum fortgesetzt werden. Zu klären bleibt lediglich, welche Ebenen dafür in Frage kommen.

Lemma 5.9:

Es sei $\{A, a, \alpha\}$ eine Fundamentalkammer in Γ und σ eine in $C \in \alpha$, $C \neq A$ berührende Ebene. Es existiert eine Ebene κ durch A , die a nicht enthält und σ in einer Geraden schneidet.

Beweis:

Es seien g eine Gerade, B und D Punkte in σ . Es sei γ eine Ebene, die A , B und D enthält. Inzidiert die Gerade a nicht mit γ , so ist die Behauptung erbracht. Andernfalls existiert eine von g verschiedene Gerade h durch B in σ . Die durch A und h definierte Ebene enthält die Gerade a nicht, da sonst ein Widerspruch zu Lemma 6.2 entsteht.

Wir geben nun eine Basis des Steinberg-Moduls an.

Theorem 5.10: (Basissatz)

Es sei Γ ein linearer Raum der Dimension drei und $\{A, a, \alpha\}$ eine Kammer. Dann ist

$$\text{rg}_R(\mathbf{St}) = \frac{X^3 Y^2 Z (YZ + Y + 1)(Z + 1)}{(XY + X + 1)(X + 1)}.$$

Eine Basis bezüglich $\{A, a, \alpha\}$ wird durch folgende dünne Teilgeometrien induziert:

- I. Es sei $\{T, t, \tau\}$ eine Kammer, wobei die Ebene τ die Ebene α nicht trifft. Bezüglich der Fahne $\{T, t\}$ ist in der Ebene τ eine Basis nach Theorem 5.9 gegeben. Es sei nun ein n -Eck in der Ebene τ gegeben, das einen einfachen n -Zyklus induziert. Die Gerade t wird mit der Geraden a entweder durch eine Ebene oder durch zwei Ebenen verbunden, so dass die

Verbindungsgerade von A und B in wenigstens einer der Ebenen liegt. Die restlichen Verbindungen zwischen τ und α werden willkürlich gewählt, so dass ein einfacher Zyklus des linearen Raumes der Dimension drei entsteht. In jeder Ebene, die α nicht trifft, gibt es

$$\frac{X^2Y(Y+1)}{X+1}$$

linear unabhängige Zyklen. Insgesamt ergeben sich dadurch

$$r_1 := \frac{X^3Y^2Z(YZ+Y+1)(Z+1)}{(XY+X+1)(X+1)} - \frac{X^3Y^2Z(Y+1)^2}{(X+1)^2} - \frac{X^3Y^2Z(Y+1)(Z-Y)}{X+1}$$

linear unabhängige einfache Zyklen.

2. Es sei β eine Ebene, welche die Ebene α im Punkt B berührt. Es sei b eine Gerade in β durch B . Bezüglich der Kammer $\{B, b, \beta\}$ kann jeder einfache Zyklus der in Theorem 5.9 konstruierten Basis von β zu einem globalen Zyklus fortgesetzt werden. Dazu verbinden wir jeden Eckpunkt des Zyklus in β mit A . Auf der Geraden a sei C ein fest gewählter Punkt. Die Ebenen werden so gewählt, dass höchstens die Ebene durch a ein Viereck ist. Dadurch ergeben sich

$$r_2 := \frac{YZ(Z-Y)}{Y+1} \cdot \frac{X^2Y(Y+1)}{X+1} \cdot (XY+X) = \frac{X^3Y^2Z(Y+1)(Z-Y)}{X+1}$$

linear unabhängige Zyklen, die α in einem Punkt berühren.

3. Es sei g eine Gerade in α , die a nicht trifft. In jeder von α verschiedenen Ebene γ durch g gibt es nach Theorem 5.9 zur Kammer $\{G, g, \gamma\}$ und jeder nicht g treffenden Geraden h genau X Zyklen. Jeder wird zu einem globalen Zyklus fortgesetzt, so dass entweder a und h in einer Ebene liegen oder die Gerade h mit der Geraden a durch zwei Ebenen verbunden wird, wobei höchstens die Ebene berührend ist, die A und g enthält. Die Anzahl dieser Zyklen ist

$$r_3 := \frac{XY(Y-X)}{X+1} \cdot \frac{X^2Y(Y-X)}{X+1} \cdot Z = \frac{X^3Y^2Z(Y-X)^2}{(X+1)^2}$$

4. Es sei D ein Punkt auf der Geraden a . Durch D gehen Y von a verschiedene Geraden. Es sei h eine von a verschiedene Gerade durch D und $\lambda \neq \alpha$ eine durch h gehende Ebene. Jeder Zyklus in λ bezüglich $\{D, h, \lambda\}$ wird zu einem globalen Zyklus fortgesetzt, indem die Pyramide mit Spitze in A gebildet wird. Folglich ergeben sich hieraus

$$r_4 := XYZ \cdot \frac{X^2Y(Y-X)}{X+1} = \frac{X^3Y^2Z(Y-X)}{X+1}$$

globale, linear unabhängige Zyklen.

5. Die letzte Klasse ist durch die Tetraeder und Pyramiden über α bezüglich der Kammer $\{A, a, \alpha\}$ gegeben. Die Anzahl ist

$$r_5 := XYZ \cdot \frac{X^2Y(Y+1)}{X+1}.$$

6. Alle induzierten Zyklen c_l werden durch $c_l(\{A, a, \alpha\}) = 1$ indiziert.

Beweis:

Es gilt

$$\left(\sum_{i_1}^{r_1} c_{i_1} + \sum_{i_2}^{r_2} c_{i_2} + \sum_{i_3}^{r_3} c_{i_3} + \sum_{i_4}^{r_4} c_{i_4} + \sum_{i_5}^{r_5} c_{i_5} \right) (\{A, a, \alpha\}) = \frac{X^3Y^2Z(YZ+Y+1)(Z+1)}{(XY+X+1)(X+1)},$$

wobei $\mathcal{B} := \{c_{i_k} \mid 1 \leq i_k \leq r_k, 1 \leq k \leq 5\}$ die Menge der konstruierten Zyklen ist.

Die konstruierten Zyklen sind linear unabhängig. Zu zeigen ist:

Der Ansatz

$$c := \sum_{i_1}^{r_1} a_{i_1} c_{i_1} + \sum_{i_2}^{r_2} a_{i_2} c_{i_2} + \sum_{i_3}^{r_3} a_{i_3} c_{i_3} + \sum_{i_4}^{r_4} a_{i_4} c_{i_4} + \sum_{i_5}^{r_5} a_{i_5} c_{i_5} = 0$$

liefert $a_{i_k} = 0$ für alle i_k .

Wir wissen schon, dass die Zyklen innerhalb ihrer Klasse linear unabhängig sind. Ferner gibt es zu jedem Zyklus einer Klasse nach Konstruktion eine Kammer C_i , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, die in keinem anderen Zyklus einer anderen Klasse auftritt. Werten wir c auf diesen Kammern aus, so folgt die Behauptung.

Es bleibt zu zeigen: \mathcal{B} erzeugt \mathbf{St} .

Es sei c ein Zyklus in \mathbf{St} . Es sei $K = \{A, a, \alpha\}$ und β eine Ebene, die disjunkt zu α ist. Es sei $\{B, b\}$ die Fundamentalkammer in der Ebene β . Es seien $X_{jk} := \{B_j, b_k, \beta\}$ die Kammern, die in der Ebene β einen Abstand vier von $\{B, b, \beta\}$ haben mit $c(X_{jk}) \neq 0$. Dann finden wir in der 1. Klasse bezüglich $\{B, b\}$ nach Theorem 5.9 einfache Zyklen c_{jk} mit $c_{jk}(\{B_j, b_k, \beta\}) \neq 0$. Es sei

$$\hat{c} = c_{jk}(\{B_j, b_k, \beta\})c - c(\{B_j, b_k, \beta\})c_{jk}.$$

Dann gilt $\hat{c}(\{B_j, b_k, \beta\}) = 0$. Wie in Theorem 5.9 werden nun alle Kammern in der Ebene β aus dem Zyklus entfernt. Wir erhalten schließlich einen Zyklus \bar{c} , der auf allen Kammern verschwindet, die eine zu α disjunkte Ebene enthalten. Folglich verschwindet \bar{c} nur noch höchstens auf Kammern nicht, die eine Ebene enthalten, die α entweder berühren oder schneiden. Jetzt fährt man mit der 2., 3. und 4. Klasse fort und erhält einen Zyklus, der höchstens noch auf Kammern nicht Null ist, die Ebenen enthalten, die α schneiden. Diese werden als letzte entfernt und die Behauptung ist erbracht.

Korollar 5.11:

$$\mathcal{H}_2^R(\Gamma) = 0.$$

Beweis:

Dies folgt unmittelbar aus der konstruierten R -Basis und aus Theorem 3.15, da jeder endliche Körper ein Hauptidealring ist. Wäre also ein Element $c + \text{im}(\partial_2) \neq \text{im}(\partial_2)$ vorhanden, so würde dies Element auch für einen Körper der Charakteristik p nicht verschwinden, also $\text{rg}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}_2^{\mathbb{Z}_p}(\Gamma)) \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch zu

$$\text{rg}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{St}) - \text{rg}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{H}_2^{\mathbb{Z}_p}(\Gamma)) = |\mathbf{K}_3| - |\mathbf{K}_2| + |\mathbf{K}_1| - 1 = \frac{X^3 Y^2 Z (YZ + Y + 1)(Z + 1)}{(XY + X + 1)(X + 1)}.$$

Abschließende Bemerkung:

Natürlich ist hier noch einiges zu erarbeiten. Ich verfolge hier die Untersuchung von speziellen Morphismen und das Operieren von Gruppen auf Geometrien nicht weiter, da dies eine eigenständige Abhandlung bedarf und den Rahmen sprengen würde. Zusammen mit meiner Dissertation und einigen guten Büchern kann hier weiter geforscht werden.

Definition A1: [14]

Es sei Γ eine Geometrie vom Rang zwei.

1. Eine **Kollineation** ist ein inzidenz-erhaltender t -Morphismus $\tau \in \text{Mor}_t(\Gamma)$.
2. Eine **Korrelation** ist ein inzidenz-erhaltender Endomorphismus $\xi \in \text{End}(\Gamma)$ mit $\xi(S_1) = S_2$ und $\xi(S_2) = S_1$.
3. Eine **Polarität** π ist eine Korrelation der Ordnung zwei.
4. Ein Punkt P heißt **isotrop**, wenn $\xi(P)IP$ für eine Korrelation ξ gilt. Entsprechend gilt dies für isotrope Geraden.
5. Wird eine Kammer F auf sich selbst unter einer Kollineation bzw. Korrelation abgebildet, so heißt F eine **Fixkammer**. Entsprechend sind **Fixpunkt** bzw. **Fixgerade** einer Kollineation definiert.

Leicht erhalten wir einige Folgerungen.

Korollar A2:

Für eine Kollineation oder Korrelation φ gilt:

1. $\varphi^m = 1_\Gamma$ für ein $m \in \mathbb{N}$, wenn Γ endlich ist.
2. $\text{Fix}_{\mathbf{K}}(\varphi) \subseteq \text{Fix}_{\mathbf{K}}(\varphi^r)$.
3. $\text{Fix}_{\mathbf{K}}(\varphi) = \text{Fix}_{\mathbf{K}}(\varphi^r)$, wenn $(r, m) = 1$.

Korollar A3:

Für eine Korrelation ξ gilt:

1. ξ^{2u} ist für jedes $u \in \mathbb{N}$ eine Kollineation.

2. Die Menge der isotropen Punkte von ξ^r , $r = 2s + 1$ wird bijektiv durch ξ auf die Menge der isotropen Geraden von ξ^r abgebildet.
3. Entsprechend bildet dann ξ die Menge der isotropen Geraden von ξ^r , $r = 2u$ bijektiv auf die Menge der isotropen Punkte von ξ^r ab.
4. $\{A, a\} \in \text{Fix}_{\mathbf{K}}(\xi)$ genau dann, wenn A ein isotroper Punkt von ξ und Fixpunkt von ξ^2 ist.

Für eine Korrelation erhalten wir mit den Inzidenzabbildungen aus 4.11 Endomorphismen $\xi^{2s+1} \circ \pi$, $\gamma \circ \xi^{2s+1}$ der freien Vektorräume über der Menge der Punkte bzw. Menge der Geraden. Entsprechend erhalten wir für jede Kollineation und jede Korrelation Endomorphismen des freien Vektorraumes über den Kammern. Für jede dieser Endomorphismen ist der SPUR-DIMENSIONSSATZ anwendbar.

Literaturverzeichnis

- [1] Th. Beth, D. Jungnickel, H. Lenz: Design Theory. Bibliographisches Institut, 1985
- [2] N. Bourbaki: Algebra I, Chapters 1 – 3. Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- [3] A.A. Bruen, U. Ott: On the p -rank of incidence matrices and a question of E. S. Lander, to appear.
- [4] F. Buekenhout: Diagrams for Geometries and Groups. Journal of Combinatorial Theory, Series A, **27** (1979), 121 – 151.
- [5] F. Buekenhout: The basic diagram of a geometry. In Geometries and Groups, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics **893** (1981), 1 – 29.
- [6] H. Cartan, S. Eilenberg: Homological Algebra. Princeton University Press, 1956.
- [7] R.W. Carter, G. Lusztig: Modular Representations of finite Groups of Lie Type. Proc. London Math. Soc. (3) **32** (1976), 347 – 384.
- [8] C.W. Curtis: The Steinberg Character of a Finite Group with a (B,N) -Pair, Journal of Algebra **4** (1966), 433 – 441.
- [9] C.W. Curtis: Representations of finite Groups of Lie Type. Bull. Amer. Math. Soc. (NS) **1** (1979), 721 – 757.
- [10] C.W. Curtis, I. Lehrer: A new Proof of a Theorem of Solomon-Tits. Proc. Amer. Math. Soc. **85** (1982), 154 – 156.
- [11] C.W. Curtis, N. Iwahori, R. Kilmoyer: Hecke Algebras and Characters of Parabolic Type of Finite Groups with (B,N) - Pairs. Publ. Math. IHES **40** (1971), 81 – 116.
- [12] C.W. Curtis, I. Lehrer, J. Tits: Spherical Buildings and the Character of the Steinberg Representation. Invent. Math. **58** (1980), 201 – 210.
- [13] H.S.M. Coxeter, W.O.J. Moser: Generators and Relations for discrete Groups. Springer-Verlag, 1980.
- [14] P. Dembowski: Finite Geometries. Springer-Verlag, 1968.
- [15] H. Garland: p -adic curvature and the cohomology of discrete Subgroups of p -adic Groups. Ann. Of Math. (2) **97** (1973), 375 – 393.
- [16] G. Hillebrandt: Über dünne Geometrien vom spärischem Typ. Dissertation, 1986
- [17] G. Hillebrandt: Homologie in endlichen Geometrien. Vortrag auf der DMV-Tagung, Berlin, 1987.
- [18] G Hillebrandt: Spur-Dimensionssatz für $K[X]$ -Moduln. Habilitationsvortrag 1990
- [19] P.J. Hilton, U. Stammach: A Course in Homological Algebra, Springer-Verlag, 1971.

- [20] P.J. Hilton, S. Wylie: Homology Theorie, Cambridge University Press, 1962.
- [21] D.R. Hughes, F.C. Piper: Design theory. Cambridge University Press, 1985.
- [22] J.E. Humphreys: The Steinberg Representation. Bull. Amer. Soc. **16** (1987), 247 – 263. University Press, 1985.
- [23] E.S. Lander: Symmetric Designs. An Algebraic Approach, L.M.S. Lecture Note Series 74, Cambridge University Press, 1983.
- [24] E.S. Moorhouse: Codes of Bruck Nets with Translations. Preprint. 1990.
- [25] U. Ott: Bericht über Hecke-Algebren und Coxeter-Algebren endlicher Geometrien. In Finite Geometries and Designs, London Mathematical Society, Lecture Notes Series **49**. Cambridge University Press (1981), 260 – 271.
- [26] U. Ott: Some Remarks on Representation Theory in Finite Geometries. In Geometries and Groups, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics **893** (1981), 68 – 110.
- [27] U. Ott: An Elementary Introduction to Algebraic Methods for finite Projective Planes. Seminario di Geometrie Combinatorie diretto da G. Tallini, Università Roma (1984).
- [28] M. Ronan: Lectures on Buildings. Academic Press, 1989.
- [29] J.R. Rotman: Homology Groups of Steiner Systems. Journal of Algebra, **92** (1985), 128 – 149.
- [30] L. Solomon: The Steinberg Character of a finite Group with BN-Pair. In Theory of finite Groups (eds: R. Brauer and C.-H. Sah) Benjamin, New York, 1969, 213 – 221.
- [31] E.H. Spanier: Algebraic Topology. McGraw-Hill, 1966.
- [32] J. Tits: Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs. Lecture Notes in Mathematics **386**. Springer-Verlag, 1974.
- [33] J. Tits: A local Approach to Buildings. In *The geometric Vein*, Coxeter Festschrift, ed.: Davis, Grünbaum, Sherk. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1981, 519 – 547.