Eigenräume, Eigenvektoren und Eigenwerte sowie deren Verallgemeinerungen

Der $\boldsymbol{K}$- Vektorraum als $\boldsymbol{K}[X]$-Modul

Es sei V ein $\boldsymbol{K}$-Vektorraum mit der Basis $\mathscr{E} := \{e_1, \dots, e_r\}$ und $\alpha \in \operatorname{End}_{\boldsymbol{K}}(V)$. In der linearen Geometrie sind wir an den von null verschiedenen α*-invarianten Unterräumen* $W \le V$ interessiert mit $\alpha(W) \subseteq W$. Beispiele hierfür sind $\ker(\alpha)$ und $\operatorname{im}(\alpha)$. Hierbei stehen natürlich Räume minimaler Dimension, insbesondere ***Eigenräume*** im Blickwinkel.

Es seien $\lambda \in \boldsymbol{K}$ und $\alpha \in \operatorname{End}_{\boldsymbol{K}}(V)$. Der von null verschiedene α***-invariante Unterraum*** $\ker\left(\alpha - \lambda \cdot 1_V\right)$ heißt ***Eigenraum*** E zum ***Eigenwert*** λ. Die Dimension $d = \dim_{\boldsymbol{K}}\left(\ker\left(\alpha - \lambda \cdot 1_V\right)\right)$ heißt ***geometrische Vielfachheit*** des Eigenwertes λ.

Eigenvektoren sind stets von null verschieden!

Ist $v \in E$ ein Eigenvektor des α-invarianten Unterraumes E, so gibt es ein $\lambda \in \boldsymbol{K}$ mit $\alpha(v) = \lambda v$ oder äquivalent $\left(\alpha - \lambda \cdot 1_V\right)(v) = 0$. Wir haben daher λ und v zu finden. Leider zerfällt V nicht immer (oder besser fast nie) vollständig in die innere direkte Summe von Eigenräumen.

Besteht der α-invariante Unterraum W nicht aus lauter Eigenvektoren, so sprechen wir in diesen Fällen von ***verallgemeinerten Eigenräumen***. Haben wir alle Eigenräume und verallgemeinerten Eigenräume gefunden, so gilt sicher $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$, denn α respektiert die innere direkte Summe. Insbesondere gilt $\dim_{\boldsymbol{K}} V = \sum_{i=1}^{r} \dim_{\boldsymbol{K}} W_i$. In einem invarianten Unterraum W möchte man einen Vektor w finden, so dass $w, \alpha(w), \alpha^2(w), \dots, \alpha^{k-1}(w)$ linear unabhängig sind (rationale Form) und W erzeugen. Im verallgemeinerten Eigenraum U entsprechend einen ***zyklischen Vektor*** u, so dass $u, \left(\alpha - \lambda \cdot 1_V\right)(u), \left(\alpha - \lambda \cdot 1_V\right)^2(u), \dots, \left(\alpha - \lambda \cdot 1_V\right)^{t-1}(u)$ eine $\boldsymbol{K}$-Basis von U und $\left(\alpha - \lambda \cdot 1_V\right)^t(u) = 0$ ist. In diesem Fall wäre $\left(\alpha - \lambda \cdot 1_V\right)^{t-1}(u)$ ein Eigenvektor.

Beispiel:

1. Der Endomorphismus $\alpha \in \operatorname{End}_{\boldsymbol{Q}}(V)$ sei durch seine Matrixdarstellung $M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ gegeben. Finden Sie alle Eigenräume.

Lösung:

Wir errechnen $\alpha(e_1) = 2e_1$, $\alpha(e_1 - 2e_2 + e_3) = 0$ und $\alpha(e_1 + 3e_2 + 6e_3) = 5(e_1 + 3e_2 + 6e_3)$. Folglich bestimmen $e_1 \in \ker\left(\alpha - 2 \cdot 1_V\right)$, $e_1 - 2e_2 + e_3 \in \ker(\alpha)$ und $e_1 + 3e_2 + 6e_3 \in \ker\left(\alpha - 5 \cdot 1_V\right)$ drei verschiedene α-invarianten Unterräume aus Eigenvektoren mit den Eigenwerten 2, 0 und 5. Es sei nun $\mathscr{B} := \{b_1 := e_1,\ b_2 := e_1 - 2e_2 + e_3,\ b_3 := e_1 + 3e_2 + 6e_3\}$, dann hat $\alpha \in \operatorname{End}_{\boldsymbol{Q}}(V)$ bezüglich dieser Basis $\mathscr{B}$ die Matrixdarstellung $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Die Matrix ist diagonalisierbar. Finden Sie $M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}(1_V)$ und $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}}(1_V)$, so dass $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}}(1_V) M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\alpha) M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}(1_V) = M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\alpha)$.

Zeigen Sie auch $M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(1_V) = M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}(1_V)^{-1}$.

2. Ändern wir nur eine Zahl ab, so ergibt sich ein ganz anderes Bild. Für $M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ finden wir $\alpha(e_1) = 2e_1$ und $\alpha(e_1 + e_2 - 2e_3) = 3(e_1 + e_2 - 2e_3)$. Folglich liegen die Eigenvektoren e_1 und $e_1 + e_2 - 2e_3$ in zwei verschiedenen α-invarianten Unterräumen, $e_1 \in \ker(\alpha - 2\cdot 1_V)$ und $e_1 + e_2 - 2e_3 \in \ker(\alpha - 3\cdot 1_V)$.

Gibt es einen dritten invarianten Unterraum?

Die Frage ist zu verneinen, da der Ansatz $\alpha(ae_1 + be_2 + ce_3) = \lambda(ae_1 + be_2 + ce_3)$ keine weiteren Eigenvektoren liefert. Ein weiterer Ansatz mit $(\alpha - 3\cdot 1_V)u = e_1 + e_2 - 2e_3$ führt auf einen Widerspruch, der mit $(\alpha - 2\cdot 1_V)v = e_1$ liefert $v = e_2 - e_3$.

Es gibt folglich nur zwei α-invariante Unterräume: $\ker(\alpha - 3\cdot 1_V)$ und $\ker\left((\alpha - 2\cdot 1_V)^2\right)$. Bezüglich der Basis $\mathscr{B} := \{b_1 := e_2 - e_3,\ b_2 := e_1,\ b_3 := e_1 + e_2 - 2e_3\}$ besitzt dann $\alpha \in \operatorname{End}_{\boldsymbol{Q}}(V)$ die Matrixdarstellung $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Dies errechnet sich aus $\alpha(e_2 - e_3) = 2(e_2 - e_3) + e_1$. Die Matrix ist nicht diagonalisierbar.

Finden Sie auch hier $M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(1_V)$ und $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}(1_V)$, so dass $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}(1_V) M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}(\alpha) M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(1_V) = M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\alpha)$.

Wie wir im Allgemeinen die Basen der α-invarianten Unterräume und daraus die Basistransformationen $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}(1_V)$ und $M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(1_V)$ finden, soll nun beschrieben werden. Für die praktische Berechnung benötigen wir die Theorie jedoch nicht, also mit Beispiel Seite 5 weiter.

Präzisieren wir also unser Vorgehen und beschreiben die Aussagen ringtheoretisch.

Es sei $\boldsymbol{K}$ ein Körper. Vermöge $X \cdot v := \alpha(v)$ wird V zu einem $\boldsymbol{K}[X]$-Modul ${}_{\boldsymbol{K}[X]}V$. Der Ring $\boldsymbol{K}[X]$ ist bekanntlich ein Hauptidealring **PID** (sogar ein Euklidischer Ring **ER**). Da $\dim_{\boldsymbol{K}} V = r$, sind $r+1$ Vektoren stets linear abhängig. Folglich ist $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) \cdot v = 0$ für jeden Vektor $v \in V$ und jedes $n \geq r$, kurz $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) \cdot V = 0$. Wir sagen: Das Polynom annulliert den Vektor bzw. den Raum. Das Polynom $\chi_\alpha := \det(X \cdot 1_V - \alpha)$ heißt ***charakteristisches Polynom*** und hat den Grad *r*. Insbesondere wird gezeigt, dass $\chi_\alpha \cdot V = 0$ ist (Satz von Cayley-Hamilton). Das charakteristische Polynom annulliert stets den ganzen Raum.

Andererseits kann es ein Polynom μ kleineren Grades geben, so dass $\mu \cdot v = 0$ für alle Vektoren $v \in V$. Das kleinste normierte Polynom mit dieser Eigenschaft heißt ***Minimalpolynom*** und wird mit μ_α bezeichnet. Insbesondere gilt $\mu_\alpha \mid \chi_\alpha$. Suchen wir also χ_α, μ_α und deren Faktorisierungen.

Im 1. Beispiel ist $\chi_\alpha = \mu_\alpha = (X-5)(X-2)X$. Im 2. Beispiel ist $\chi_\alpha = \mu_\alpha = (X-3)(X-2)^2$. Wir werden bald sehen, dass χ_α, μ_α und deren Faktorisierungen die invarianten Unterräume noch nicht vollständig beschreiben, wenn $\dim_{\boldsymbol{K}} V > 3$, sondern erst ***die Elementarteiler***.

Es soll im Nachfolgenden nicht im Detail die Theorie beschrieben werden. Hier verweise ich auf die einschlägige Literatur.

Trotzdem sollen an Hand eines Beispiels alle möglichen Matrixdarstellungen nebst zugehöriger Basen berechnet werden.

Beispiel

Es sei V ein $\boldsymbol{Q}$-Vektorraum der Dimension vier mit der Standardbasis $\mathscr{E} := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Es sei $\alpha \in \operatorname{End}_{\boldsymbol{Q}}(V)$ mit

$$M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die ***rationale kanonische Zerlegung*** von V und eine Basis $\mathscr{R}$, so dass $M_{\mathscr{R}}^{\mathscr{R}}(\alpha)$ die rationale kanonische Matrix ist.
2. Bestimmen Sie die ***Primärzerlegung*** von V und eine Basis $\mathscr{P}$, so dass $M_{\mathscr{P}}^{\mathscr{P}}(\alpha)$ die primäre rationale kanonische Matrix ist.
3. Bestimmen Sie die ***Jordanzerlegung*** von V und eine Basis $\mathscr{J}$, so dass $M_{\mathscr{J}}^{\mathscr{J}}(\alpha)$ die Jordan-Matrix ist.

Erinnerung: Ein Element m eines R-Moduls M heißt ein ***Torsionselement***, wenn es ein von null verschiedenes $r \in R$ mit $rm = 0$ gibt. Sind alle Elemente aus M Torsionselemente, so heißt M ein R-***Torsionsmodul***. Mithin ist nach dieser Definition V ein $\boldsymbol{K}[X]$-Torsionsmodul vermöge α.
Es sei M ein freier $\boldsymbol{K}[X]$-Modul mit der Basis $\mathscr{A} := \{m_1, \ldots, m_r\}$, M habe folglich dieselbe Dimension wie V. Da M freier $\boldsymbol{K}[X]$-Modul ist, gilt für $t \in \boldsymbol{K}[X]$, $m \in M$, $m \neq 0$ und $tm = 0$ folglich $t = 0$. Via $\varphi(m_i) := e_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ wird ein surjektiver $\boldsymbol{K}[X]$-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to {}_{\boldsymbol{K}[X]}V$ durch lineare Fortsetzung definiert. Folglich gilt $M/\ker(\varphi) \cong V$. Es sei $N := \ker(\varphi)$ und $\mathscr{B} := \{n_1, \ldots, n_r\}$ eine Basis von N. (Da V ein $\boldsymbol{K}[X]$-Torsionsmodul ist, folgt aus $n_i = \sum_{j=0}^{k_i} a_{ji} X^j m_i$ die Gleichung $0 = \varphi(n_i) = \sum_{j=0}^{k_i} a_{ji} \alpha^j (\varphi(m_i)) = \sum_{j=0}^{k_i} a_{ji} \alpha^j (e_i)$. Man konstruiere folglich linear unabhängige Polynome $\sum_{j=0}^{k_i} a_{ji} X^j$). Es sei $\iota : N \to M$ die kanonische Injektion und $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\iota)$ die zugehörige Matrix. Dann existieren ***Elementarmatrizen*** $P, Q \in \operatorname{Mat}_r(\boldsymbol{K}[X]) = \operatorname{Mat}_r(\boldsymbol{K})[X]$, so dass $P M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\iota) Q = \operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_r)$ und $s_1 \mid s_2 \mid \cdots \mid s_r$. Die Polynome $s_1, s_2, \cdots, s_r$ heißen ***Elementarteiler***. Wir fassen P und Q als ***Basistransformation***

von M bzw. N auf. Es sei $\mathscr{A}^* := \left\{ m_1^*, \ldots, m_r^* \right\}$ die Basis von M bezüglich der $P = M_{\mathscr{A}}^{\mathscr{A}^*}(1_M)$ die Basistransformation ist. Dann hat N die Basis $\mathscr{B}^* := \left\{ s_1 m_1^*, \ldots, s_r m_r^* \right\}$, da $Q = M_{\mathscr{B}^*}^{\mathscr{B}}(1_N)$ auf N eine Basistransformation ist. Folglich ist M/N die direkte Summe von zyklischen Untermodulen die von $m_1^* + N, \ldots, m_r^* + N$ mit den Ordnungen $s_1, \ldots, s_r$ erzeugt werden. Wegen $M/N \cong V$ zerfällt V in eine direkte Summe von zyklischen Unterräumen, die von $\varphi(m_1^*), \ldots, \varphi(m_r^*)$ erzeugt werden. Insbesondere bestimmt P^{-1} die Gleichungen $m_i^* = \sum_{j=1}^r t_{ji} m_j$ und wir finden $\varphi(m_i^*) = \sum_{j=1}^r t_{ji}(\alpha) e_j$ als zyklische Erzeuger, falls $m_i^* \notin N$.

Es wird nun gezeigt, dass die Elementarteiler von V mit den Elementarteilern der Matrix $M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(X \cdot 1_V - \alpha)$ übereinstimmen.

Konstruktion einer Basis von $\ker(\varphi)$

Es sei $A := M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(X \cdot 1_V - \alpha)$ und

$$n_i := \sum_{j=1}^r a_{ji} m_j = X \cdot m_i - \sum_{j=1}^r \tilde{a}_{ji} m_j$$

wobei $a_{ji} := A(j,i)$ und $\tilde{a}_{ji} := M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\alpha)(j,i)$ gesetzt sei. Dann gilt $\varphi(n_i) = 0$, also $\sum_{i=1}^r n_i \cdot \boldsymbol{K}[X] \subseteq N$ ist ein Untermodul von N. Mit $N' := \sum_{i=1}^r n_i \cdot \boldsymbol{K}[X]$ und $W := \left\{ m_1 + N', \ldots, m_r + N' \right\}$ ist

$$\begin{aligned} X \cdot (m_i + N') = X \cdot m_i + N' &= \left(X \cdot m_i - \sum_{j=1}^r \tilde{a}_{ji} m_j \right) + \sum_{j=1}^r \tilde{a}_{ji} m_j + N' \\ &= n_i + \sum_{j=1}^r \tilde{a}_{ji} m_j + N' \\ &= \sum_{j=1}^r \tilde{a}_{ji} (m_j + N'). \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\sum_{j=1}^r (m_j + N') \cdot \boldsymbol{K} = \sum_{j=1}^r (m_j + N') \cdot \boldsymbol{K}[X].$$

Setzen wir $W' := \sum_{j=1}^r m_j \cdot \boldsymbol{K}$, so folgt $W' + N' = M$.

Es sei nun $n \in N$, dann ist $n = w' + n' \in W' + N'$. Mit $w' = \sum_{i=1}^r a_i m_i$ folgt $0 = \varphi(n) = \sum_{i=1}^r a_i e_i$, also $a_i = 0$ für alle i und damit $n = n'$.

Es bleibt zu zeigen: Aus $\sum_{i=1}^r g_i n_i' = 0$ folgt $g_i = 0$ für alle i.

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{r} g_i n_i' = \sum_{i=1}^{r} g_i \left(X \cdot m_i - \sum_{j=1}^{r} \tilde{a}_{ji} m_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} g_i X \cdot m_i - \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} g_i \tilde{a}_{ji} m_j \\
&= \sum_{i=1}^{r} X \cdot g_i \cdot m_i - \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r} \tilde{a}_{ij} g_j \cdot m_i \\
&= \left(\sum_{i=1}^{r} X \cdot g_i - \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \tilde{a}_{ij} g_j \right) m_i \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left(X \cdot g_i - \sum_{j=1}^{r} \tilde{a}_{ij} g_j \right) m_i
\end{aligned}
$$

Nach Voraussetzung ist M frei, also $X \cdot g_i = \sum_{j=1}^{r} \tilde{a}_{ij} g_j$ für alle i. Ist $t = \max\left\{ \deg(g_i) \middle| 1 \le i \le r \right\}$, so folgt der Widerspruch $t = \deg\left(\sum_{j=1}^{r} \tilde{a}_{ij} g_j \right) = \deg\left(X \cdot g_p \right) = 1 + t$ für $\deg\left(g_p \right) = t$.

Beispiele

Es sei V ein $\boldsymbol{Q}$-Vektorraum der Dimension vier mit der Standardbasis $\mathscr{E} := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Es sei $\alpha \in \operatorname{End}_{\boldsymbol{K}}(V)$ mit

$$
M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.
$$

1. Bestimmen Sie die ***rationale kanonische Zerlegung*** von V und eine Basis $\mathscr{R}$, so dass $M_{\mathscr{R}}^{\mathscr{R}}(\alpha)$ die rationale kanonische Matrix ist.
2. Bestimmen Sie die ***Primärzerlegung*** von V und eine Basis $\mathscr{P}$, so dass $M_{\mathscr{P}}^{\mathscr{P}}(\alpha)$ die primäre rationale kanonische Matrix ist.
3. Bestimmen Sie die ***Jordanzerlegung*** von V und eine Basis $\mathscr{J}$, so dass $M_{\mathscr{J}}^{\mathscr{J}}(\alpha)$ die Jordan-Matrix ist.

Es sei M der freie $\boldsymbol{Q}[X]$-Modul mit Basis $\mathscr{A} := \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$. Dann ist $M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\iota) = M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}\left(X \cdot 1_V - \alpha \right)$, wobei $\iota : N \to M$ und $N := \ker(\varphi)$ ist.

Zuerst bestimmen wir die Elementarteiler und damit die Matrix P. Die Elementarmatrizen müssen später nicht notiert werden. Die Reihenfolge des Produktes jedoch schon. Beginnen wir mit dem 1. Diagonalelement. Es ist

$$
M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}\left(X \cdot 1_V - \alpha \right) = \begin{pmatrix} X-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & X-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & X & 1 \\ -1 & -1 & -1 & X-2 \end{pmatrix}.
$$

P_2^1: Wir vertauschen die erste und zweite Zeile. $A_2^1(2-X)$: Die erste Zeile wird mit $2-X$ multipliziert und zur zweiten addiert. $A_4^1(1)$: Wir addieren die erste Zeile zur vierten Zeile.

$$P_2^1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ A_2^1(2-X)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2-X&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ A_4^1(1)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

Dies liefert die folgende Matrix:

$$A_4^1(1)\,A_2^1(2-X)\,P_2^1 M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}\left(X\cdot 1_V-\alpha\right)=\begin{pmatrix}1&X-1&0&0\\0&-(X-1)(X-2)&0&0\\0&1&X&1\\0&X-2&-1&X-2\end{pmatrix}$$

Zu beachten ist noch, dass der Rang der Matrix immer noch 4 ist.

Fahren wir mit dem 2. Diagonalelement fort.

P_3^2: Vertauschen der 2. und 3. Zeile. $A_3^2((X-1)(X-2))$: Multiplizieren der 2. Zeile mit $(X-1)(X-2)$ und zur 3. Zeile addieren. $A_4^2(2-X)$: Zuletzt multiplizieren wir die 2. Zeile mit $2-X$ und addieren sie zur 4. Zeile.

$$P_3^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ A_3^2\left((X-1)(X-2)\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&(X-1)(X-2)&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ A_4^2(2-X)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&2-X&0&1\end{pmatrix}$$

Wir erhalten

$$A_4^2(2-X)A_3^2((X-1)(X-2))P_3^2\begin{pmatrix}1&X-1&0&0\\0&-(X-1)(X-2)&0&0\\0&1&X&1\\0&X-2&-1&X-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&X-1&0&0\\0&1&X&1\\0&0&X(X-1)(X-2)&(X-1)(X-2)\\0&0&-(X-1)^2&0\end{pmatrix}.$$

Wieder überprüfen wir den Rang der Matrix. Wir stellen $\operatorname{rg}_{\boldsymbol{K}[X]}M=4$ fest und diagonalisieren weiter. Zuerst erniedrigen wir den Grad des Polynoms an der 3. Diagonalen auf 1. Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten. Ich gehe schrittweise vor.

$A_3^4(X)$: Wir multiplizieren die 4. Zeile mit X und addieren sie zur 3. $A_3^4(-1)$: Erneutes Multiplizieren der 4. Zeile mit -1 und addieren zur 3. Zeile.

$$A_2^4(X)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&X\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\text{ und }A_2^4(-1)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Dies liefert die Matrix

$$\begin{pmatrix}1&X-1&0&0\\0&1&X&1\\0&0&-(X-1)&(X-1)(X-2)\\0&0&-(X-1)^2&0\end{pmatrix}.$$

$A_4^3(1-X)$: Als letzten Schritt multiplizieren wir die 3. Zeile mit $1-X$ und addieren sie zur 4. Zeile.

$$A_4^3(1-X)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1-X&1\end{pmatrix}$$

Die obere Dreiecksmatrix lautet damit:

$$\begin{pmatrix}1&X-1&0&0\\0&1&X&1\\0&0&-(X-1)&(X-1)(X-2)\\0&0&0&-(X-1)^2(X-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-(X-1)&0\\0&0&0&-(X-1)^2(X-2)\end{pmatrix}+L,$$

also

$$PM_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}(X\cdot 1_V-\boldsymbol{\alpha})=PM_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}(X\cdot 1_V-\alpha)=\operatorname{diag}\left(1,1,-(X-1),-(X-1)^2(X-2)\right)+L$$

mit

$$P=A_4^3(1-X)A_3^4(-1)A_3^4(X)A_4^2(2-X)A_3^2((X-1)(X-2))P_3^2A_4^1(1)A_2^1(2-X)P_2^1.$$

Insbesondere sind $\mu_\alpha=(X-1)^2(X-2)$ das Minimalpolynom und $\chi_\alpha=(X-1)^3(X-2)$ das charakteristische Polynom.

Ist nun $\mathscr{A}^*:=\left\{m_1^*;m_2^*;m_3^*;m_4^*\right\}$ die Basis von M mit $P=M_{\mathscr{A}}^{\mathscr{A}^*}(1_M)$ als Basistransformation, dann hat N die Basis $\mathscr{B}^*=\left\{m_1^*,m_2^*,-(X-1)m_3^*,-(X-1)^2(X-2)m_4^*\right\}$.

Zur Berechnung der erzeugenden Vektoren für die Zerlegungen berechnen wir P^{-1}.

$$P^{-1}=P_2^1A_2^1(X-2)A_4^1(-1)P_3^2A_3^2(-(X-1)(X-2))A_4^2(X-2)A_3^4(-X)A_3^4(1)A_4^3(X-1)$$

Also

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}X-2&-(X-1)(X-2)&-X(X-2)&-(X-1)\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&X-2&X-1&1\end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir $m_1^*=(X-2)m_1+m_2-m_4$ mit

$$\varphi\left(m_1^*\right)=(\alpha-2\cdot 1_V)e_1+e_2-e_4=-e_2+e_4+e_2-e_4=0,$$

$m_2^*=-(X-1)(X-2)m_1+m_3+(X-2)m_4$ mit

$$\begin{aligned}\varphi\left(m_2^*\right)&=-(\alpha-1_V)(\alpha-2\cdot 1_V)e_1+e_3+(\alpha-2\cdot 1_V)e_4\\&=-(\alpha-1_V)(-e_2+e_4)+e_3-e_3\\&=-e_3+e_4-(-e_3+e_4)\\&=0\end{aligned}$$

$m_3{}^*=-X(X-2)m_1+(X-1)m_4$ mit

$$\begin{aligned}\varphi(m_3^*) &= -\alpha(\alpha - 2\cdot 1_V)e_1 + (\alpha - 1_V)e_4 \\ &= \alpha(e_2 - e_4) - e_3 + e_4 \\ &= e_2 - e_3 + e_4 + e_3 - 2e_4 - e_3 + e_4 \\ &= e_2 - e_3\end{aligned}$$

$m_4{}^* = -(X-1)m_1 + m_4$ mit

$$\begin{aligned}\varphi(m_4{}^*) &= -(\alpha - 1_V)e_1 + e_4 \\ &= -e_1 + e_2 - e_4 + e_4 \\ &= -e_1 + e_2\end{aligned}$$

Zu 1. Rationale kanonische Zerlegung

Sie wird durch die Elementarteiler geliefert. Die Elementarteiler von V lauten folglich

$$1, 1, -(X-1), -(X-1)^2(X-2) = -X^3 + 4X^2 - 5X + 2 .$$

Eine Zerlegung von V ist durch

$$V = V[X-1] \oplus V\left[(X-1)^2(X-2)\right]$$

gegeben, wobei $V[X-1]$ ein zyklischer Untermodul der Ordnung $X-1$ ist, der von $\varphi(m_3^*) = e_2 - e_3$ erzeugt wird.

$e_2 - e_3$ ist folglich eine Basis für $V[X-1]$.

$V\left[(X-1)^2(X-2)\right]$ ist ein zyklischer Untermodul der Ordnung $(X-1)^2(X-2)$, der von $\varphi(m_4^*) = -e_1 + e_2$ erzeugt wird. Eine geordnete Basis für $V\left[(X-1)^2(X-2)\right]$ ist folglich

$$\left[-e_1 + e_2,\ \alpha(-e_1 + e_2) = -2e_1 + 2e_2 - e_3,\ \alpha^2(-e_1 + e_2) = -4e_1 + 4e_2 - 2e_3 - e_4\right].$$

Eine Basis $\mathscr{R}$ der rationalen Zerlegung von V ist folglich

$$\mathscr{R} = \{r_1 := e_2 - e_3,\ \ r_2 := -e_1 + e_2,\ \ r_3 := -2e_1 + 2e_2 - e_3,\ \ r_4 := -4e_1 + 4e_2 - 2e_3 - e_4\}.$$

Da $-\alpha^3 + 4\alpha^2 - 5\alpha + 2\cdot 1_V$ die Nullabbildung ist, bestimmt $\alpha^3 = 4\alpha^2 - 5\alpha + 2\cdot 1_V$ die rationale kanonische Matrix, denn $\alpha^3(r_2) = 4\alpha^2(r_2) - 5\alpha(r_2) + 2\cdot 1_V(r_2) = 4r_4 - 5r_3 + 2r_2$.

$$M_{\mathscr{R}}^{\mathscr{R}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ferner gilt

$$M_{\mathscr{R}}^{\mathscr{E}}(1_V) M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\alpha) M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{R}}(1_V) = M_{\mathscr{R}}^{\mathscr{R}}(\alpha)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zu 2. Primärzerlegung

Sie ist durch die Primteiler des Minimalpolynoms bestimmt. Dies sind $(X-1)^2$ und $X-2$. Also ist

$$V = V\left[(X-1)^2\right] \oplus V[X-2],$$

wobei $V\left[(X-1)^2\right]$ von $(X-1)^2$ und $V[X-2]$ von $X-2$ annulliert wird.

Nach **1.** wird der zyklische Untermodul $V\left[(X-1)^2(X-2)\right]$ von $-e_1+e_2$ erzeugt. Folglich wird der Vektor $(\alpha-2\cdot 1_V)(-e_1+e_2)=-e_3$ von $(X-1)^2$ annulliert. Entsprechend wird der Vektor $(\alpha-1_V)^2(-e_1+e_2)=-e_1+e_2-e_4$ von $X-2$ annulliert. Da e_2-e_3 Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist, annulliert $X-1$ seinen Eigenvektor e_2-e_3. Folglich ist $\left[e_2-e_3,\ -e_3,\ \alpha(-e_3)=-e_4\right]$ eine geordnete Basis von $V\left[(X-1)^2\right]$ und $-e_1+e_2-e_4$ eine Eigenbasis von $V[X-2]$.
Setzen wir $\mathscr{P}=\left\{p_1:=e_2-e_3,\ p_2:=-e_3,\ p_3:=-e_4,\ p_4:=-e_1+e_2-e_4\right\}$, so ist

$$M_{\mathscr{P}}^{\mathscr{P}}(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

die primäre rationale kanonische Matrix, da $(X-1)^2\cdot p_2=0$. Ferner sind die Matrizen

$$M_{\mathscr{P}}^{\mathscr{E}}(1_V)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&-1&-1&0\\1&0&0&-1\\-1&0&0&0\end{pmatrix} \text{ und } M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{P}}(1_V)=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\1&0&0&1\\-1&-1&0&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$$

die Koordinatentransformationen, wobei

$$M_{\mathscr{P}}^{\mathscr{E}}(1_V)M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\alpha)M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{P}}(1_V)=M_{\mathscr{P}}^{\mathscr{P}}(\alpha)$$

mit

$$M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\alpha)=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&0&-1\\1&1&1&2\end{pmatrix}.$$

Zu 3. Jordan-Zerlegung

Sie ist eine vollständige Zerlegung von V in ***zyklische Untermodulen***, wobei die ***Primteiler die Basis bestimmen***.
Nach **2.** ist e_2-e_3 Eigenvektor von $V[X-1]$ und $-e_1+e_2-e_4$ Eigenvektor von $V[X-2]$. Da der Vektor $-e_3$ von $(X-1)^2$ annulliert wird, ist $\left[-e_3,(\alpha-1_V)(-e_3)=e_3-e_4\right]$ eine geordnete Basis von $V\left[(X-1)^2\right]$. Damit zerfällt V in

$$V=V[X-1]\oplus V\left[(X-1))^2\right]\oplus V[X-2].$$

Setzen wir $\mathscr{J}=\left\{j_1:=e_2-e_3,\ j_2:=-e_3,\ j_3:=e_3-e_4,\ j_4:=-e_1+e_2-e_4\right\}$, so ist

$$M^{\mathscr{J}}_{\mathscr{J}}(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

Ferner sind die Matrizen

$$M^{\mathscr{E}}_{\mathscr{J}}(1_V)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&-1&-1\\1&0&0&-1\\-1&0&0&0\end{pmatrix} \text{ und } M^{\mathscr{J}}_{\mathscr{E}}(1_V)=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\1&0&0&1\\-1&-1&1&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$$

die Koordinatentransformationen, wobei

$$M^{\mathscr{E}}_{\mathscr{J}}(1_V)M^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}}(\alpha)M^{\mathscr{J}}_{\mathscr{E}}(1_V)=M^{\mathscr{J}}_{\mathscr{J}}(\alpha)$$

mit

$$M^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}}(\alpha)=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&0&-1\\1&1&1&2\end{pmatrix}.$$

Abschließende Bemerkung

Zur Berechnung aller möglichen Zerlegungen benötigen wir die Elementarmatrizen P_i^j und $A_k^l(\,\cdot\,)$ der Umformungen, die zu den Elementarteilern führen. Hierbei ist das Produkt der Elementarmatrizen zu notieren.

Nennen wir das Produkt P, so ist die Inverse P^{-1} zu berechnen.

Aus dieser können die erzeugenden Vektoren berechnet werden. In unserem Beispiel die letzten beiden Spalten, da der „Unterrang“ der nichttrivialen Elementarteiler zwei beträgt.

Aus den erzeugenden Vektoren werden nun die Basisvektoren der entsprechenden Zerlegungen berechnet.

Diese bestimmen dann die Basistransformationen.

Zum Abschluss werden wir noch ein Beispiel betrachten, bei dem auch ein Spaltentausch notwendig ist, um die Elementarteiler zu berechnen.

Weiterführendes Beispiel

Es sei V ein $\boldsymbol{Q}$-Vektorraum der Dimension vier mit der Standardbasis $\mathscr{E}:=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$. Es sei $\alpha\in\mathrm{End}_{\boldsymbol{K}}(V)$ mit

$$M^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}}(\alpha)=\begin{pmatrix}1&2&3&-4\\-1&4&2&-4\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

In dieser Matrix erkennen wir schon einen Teil einer Jordanuntermatrix. Bestimmen wir die Elementarteiler.

$$M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}\left(X\cdot 1_V-\alpha\right)=\begin{pmatrix} X-1 & -2 & -3 & 4\\ 1 & X-4 & -2 & 4\\ 0 & 0 & X-2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & X-2 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist $((X-1)(X-4)+2)(X-2)^2=(X-2)^3(X-3)$. Da wir kein Probierverfahren durchführen wollen um die Elementarteiler zu finden, bestimmen wir die Elementarmatrizen der Zeilen- und Spaltenumformungen.

Wir tauschen die 1. und 2. Zeile P_2^1, multiplizieren danach die 1. Zeile mit $-(X-1)$ und addieren sie zur 2. Zeile $A_2^1(-(X-1))$.

$$\begin{pmatrix} 1 & X-4 & -2 & 4\\ X-1 & -2 & -3 & 4\\ 0 & 0 & X-2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & X-2 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & X-4 & -2 & 4\\ 0 & -(X-2)(X-3) & 2X-5 & -4(X-2)\\ 0 & 0 & X-2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & X-2 \end{pmatrix}$$

Leider sind die Elementarteiler $s_1, s_2, s_3, s_4=\mu_\alpha$ nicht ablesbar, da $s_1=1 \mid s_2 \mid s_3 \mid s_4=\mu_\alpha$ nicht erfüllt ist.

Hier bieten sich mehrere Möglichkeit an um weiterzuarbeiten. Die 3. Zeile wird mit -2 multipliziert und zur 2. Zeile addiert, um den Grad des Polynoms $2X-5$ zu erniedrigen. Danach würden die 2. und 3. Spalte getauscht.

Ich tausche die 2. und 4. Spalte ${}_4^2P$ und die 2. und 3. Zeile P_3^2.

$$\begin{pmatrix} 1 & X-4 & -2 & 4\\ 0 & -(X-2)(X-3) & 2X-5 & -4(X-2)\\ 0 & 0 & X-2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & X-2 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & X-4 & -2 & 4\\ 0 & -1 & X-2 & 0\\ 0 & -4(X-2) & 2X-5 & -(X-2)(X-3)\\ 0 & X-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit $A_3^4(4)$ eliminieren wir das Element $-4(X-2)$ und mit $A_4^2(X-2)$ das verbliebene Element der 4. Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & X-4 & -2 & 4\\ 0 & -1 & X-2 & 0\\ 0 & -4(X-2) & 2X-5 & -(X-2)(X-3)\\ 0 & X-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & X-4 & -2 & 4\\ 0 & -1 & X-2 & 0\\ 0 & 0 & 2X-5 & -(X-2)(X-3)\\ 0 & 0 & (X-2)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun sind die Grade der Polynome $(X-2)^2$ und anschließend $2X-5$ zu reduzieren. Dafür multiplizieren wir die 3. Zeile mit $-0,5(X-2)$ und addieren sie zu der 4. Zeile $A_4^3(-0,5(X-2))$.

$$\begin{pmatrix} 1 & X-4 & -2 & 4\\ 0 & -1 & X-2 & 0\\ 0 & 0 & 2X-5 & -(X-2)(X-3)\\ 0 & 0 & (X-2)^2 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & X-4 & -2 & 4\\ 0 & -1 & X-2 & 0\\ 0 & 0 & 2X-5 & -(X-2)(X-3)\\ 0 & 0 & 0,5(X-2) & 0,5(X-2)^2(X-3) \end{pmatrix}$$

Wie wir es auch drehen und wenden, selbst nach Tauschen der letzten beiden Zeilen oder Spalten erreichen wir keine Teilbarkeit der Elementarteiler. Folglich addieren wir das -4fache der 4. Zeile zu der 3. Zeile $A_3^4(-4)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & X-4 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2X-5 & -(X-2)(X-3) \\ 0 & 0 & 0,5(X-2) & 0,5(X-2)^2(X-3) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & X-4 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2(X-2)^2(X-3) \\ 0 & 0 & 0,5(X-2) & 0,5(X-2)^2(X-3) \end{pmatrix}$$

Bleibt im letzten Schritt $A_4^3(0,5(X-2))$ durchzuführen.

$$\begin{pmatrix} 1 & X-4 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2(X-2)^2(X-3) \\ 0 & 0 & 0,5(X-2) & 0,5(X-2)^2(X-3) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & X-4 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2(X-2)^2(X-3) \\ 0 & 0 & 0 & (X-2)^3(X-3) \end{pmatrix}$$

Endlich erhalten wir

$$\mu_\alpha = \chi_\alpha = (X-2)^3(X-3).$$

Die Elementarteiler sind folglich bis auf Assoziierte $s_1 = 1 \mid s_2 = 1 \mid s_3 = 1 \mid s_4 = \mu_\alpha = \chi_\alpha$.

Das Produkt der Elementarmatrizen lautet

$$P = A_4^3(0,5(X-2))\,A_3^4(-4)\,A_4^3(-0,5(X-2))\,A_4^2(X-2)\,A_3^4(4)\,P_3^2 A_2^1(-(X-1))\,P_2^1.$$

Für die erzeugenden Vektoren muss P^{-1} berechnet werden. Die Permutation P_j^i ist natürlich eine Transposition. Also $\left(P_j^i\right)^2 = E$.

$$P^{-1} = P_2^1 A_2^1(X-1)\,P_3^2 A_3^4(-4)\,A_4^2(-(X-2))\,A_4^3(0,5(X-2))\,A_3^4(4)\,A_4^3(-0,5(X-2))$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ X-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(X-2) & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5(X-2) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5(X-2) & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} X-1 & 4(X-2) & 4(X-2)^2 - 2(X-2) + 1 & -8(X-2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(X-2) & -(X-2)^2 & 2(X-2)+1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten mit $M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$(X-1)e_1 + e_2 = -e_2 + e_2 = 0$$

$$4(X-2)e_1 + e_3 - (X-2)e_4 = (X-2)(4e_1 - e_4) + e_3 = -4e_1 - 4e_2 - (-4e_1 - 4e_2 + e_3) + e_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \left(4(X-2)^2 - 2(X-2) + 1\right)e_1 - (X-2)^2 e_4 &= (X-2)\left[(X-2)(4e_1 - e_4) - 2e_1\right] + e_1 \\ &= (X-2)\left[-4e_1 - 4e_2 - (-4e_1 - 4e_2 + e_3) - 2e_1\right] + e_1 \\ &= (X-2)(-e_3 - 2e_1) + e_1 \\ &= -3e_1 - 2e_2 + 2e_1 + 2e_2 + e_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$-8(X-2)e_1+(2(X-2)+1)e_4=(X-2)(-8e_1+2e_4)+e_4$$
$$=8e_1+8e_2+2(-4e_1-4e_2)+e_4$$
$$=e_4$$

Folglich ist e_4 einziger erzeugender Vektor.

Rationale kanonische Zerlegung

Für die geordnete Basis berechnen wir

$\alpha(e_4)=-4e_1-4e_2+e_3$,

$\alpha^2(e_4)=\alpha(-4e_1-4e_2+e_3)=-4e_1+4e_2-8e_1-16e_2+3e_1+2e_2+2e_3=-9e_1-10e_2+2e_3$,

$\alpha^3(e_4)=\alpha(-9e_1-10e_2+2e_3)=-9e_1+9e_2-20e_1-40e_2+6e_1+4e_2+4e_3=-23e_1-27e_2+4e_3$

und setzen $\mathscr{R}=\{r_1:=e_4,\ r_2:=-4e_1-4e_2+e_3,\ r_3:=-9e_1-10e_2+2e_3,\ r_4:=-23e_1-27e_2+4e_3\}$.

Die Matrixdarstellung in der Basis $\mathscr{R}$ ist wegen

$$\alpha^4(r_1)=-9\alpha^3(r_1)+30\alpha^2(r_1)-44\alpha(r_1)+24\cdot 1_V(r_1)=-9r_4+30r_3-44r_2+24r_1$$

$$M_{\mathscr{R}}^{\mathscr{R}}(\alpha)=\begin{pmatrix}0&0&0&24\\1&0&0&-44\\0&1&0&30\\0&0&1&-9\end{pmatrix}$$

und der Basiswechsel der rationalen kanonischen Zerlegung durch

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&0&0&3\\-14&10&-13&0\\11&-7&16&0\\-2&1&-4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&-4\\-1&4&2&-4\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-4&-9&-23\\0&-4&-10&-27\\0&1&2&4\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&24\\1&0&0&-44\\0&1&0&30\\0&0&1&-9\end{pmatrix}$$

also

$$M_{\mathscr{R}}^{\mathscr{C}}(1_V)M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}(\alpha)M_{\mathscr{C}}^{\mathscr{R}}(1_V)=M_{\mathscr{R}}^{\mathscr{R}}(\alpha)$$

gegeben.

Da das Minimalpolynom mit dem charakteristischen Polynom übereinstimmt, bleibt es bei der Zerlegung bei

$$V=V\left[(X-2)^3(X-3)\right].$$

Primärzerlegung

Die Primteiler des Minimalpolynoms lauten: $(X-2)^3$ und $X-3$. Mithin ist

$$V = V[(X-3)] \oplus V\left[(X-2)^3\right].$$

Mit e_4 als erzeugenden Vektor wird $(X-2)^3 e_4$ von $X-3$ annulliert und $(X-3)e_4$ ist ein erzeugender Vektor des zyklischen Raumes $V\left[(X-2)^3\right]$.

Es ist

$$M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\alpha - 2\cdot 1_V) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also $(X-2)^3 e_4 = -3e_1 - 3e_2$. $e_1 + e_2$ ist damit ein Eigenvektor zum Eigenwert 3. Weiter ist $(X-3)e_4 = -4e_1 - 4e_2 + e_3 - e_4$ und damit $-4e_1 - 4e_2 + e_3 - e_4$,

$$\begin{aligned} \alpha(-4e_1 - 4e_2 + e_3 - e_4) &= (-4-8+3+4)e_1 + (4-16+2+4)e_2 + (2-1)e_3 - 2e_4 \\ &= -5e_1 - 6e_2 + e_3 - 2e_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2(-4e_1 - 4e_2 + e_3 - e_4) &= \alpha(-5e_1 - 6e_2 + e_3 - 2e_4) \\ &= (-5-12+3+8)e_1 + (5-24+2+8)e_2 + (2-2)e_3 - 4e_4 \\ &= -6e_1 - 9e_2 - 4e_4. \end{aligned}$$

Eine Basis der Primärzerlegung ist folglich

$$\mathscr{P} = \{p_1 := e_1 + e_2,\ p_2 := -4e_1 - 4e_2 + e_3 - e_4,\ p_3 := -5e_1 - 6e_2 + e_3 - 2e_4,\ p_4 := -6e_1 - 9e_2 - 4e_4\}.$$

Ferner

$$M_{\mathscr{P}}^{\mathscr{P}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

die primäre rationale kanonische Matrix, da $(\alpha-2)^3 p_2 = \alpha^3 p_2 - 6\alpha^2 p_2 + 12\alpha p_2 - 8p_2 = 0$. Daraus folgen

$$M_{\mathscr{P}}^{\mathscr{E}}(1_V) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 \\ -4 & 4 & -2 & -3 \\ 4 & -4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{P}}(1_V) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & -4 & -6 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

für

$$M_{\mathscr{P}}^{\mathscr{E}}(1_V) M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\alpha) M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{P}}(1_V) = M_{\mathscr{P}}^{\mathscr{P}}(\alpha),$$

mit

$$M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jordan-Zerlegung

Sie ist eine vollständige Zerlegung von V in ***zyklische Untermodulen***, wobei die ***Primteiler die Basis*** bestimmen.

Wir wissen schon, dass e_1+e_2 Eigenvektor zum Eigenwert 3 ist. Ferner, dass $(X-2)^2(X-3)e_4$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 ist, da e_4 ein erzeugender Vektor und $\mu_\alpha=\chi_\alpha=(X-2)^3(X-3)$ das Minimalpolynom sind.

Da $(X-3)e_4=-4e_1-4e_2+e_3-e_4$, $(X-2)(-4e_1-4e_2+e_3-e_4)=3e_1+2e_2-e_3$

und

$(X-2)^2(-4e_1-4e_2+e_3-e_4)=(X-2)(3e_1+2e_2-e_3)=-2e_1-e_2$,

ist

$$\mathscr{J}=\{j_1:=e_1+e_2,\ j_2:=-4e_1-4e_2+e_3-e_4,\ j_3:=3e_1+2e_2-e_3,\ j_4:=-2e_1-e_2\}$$

eine vollständige Zerlegung von V.

$$V=V[X-3]\oplus V\left[(X-2)^3\right]$$

Bezüglich der Basis $\mathscr{J}$ hat nun der Endomorphismus die Darstellung

$$M_{\mathscr{J}}^{\mathscr{J}}(\alpha)=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

Ferner sind die Matrizen

$$M_{\mathscr{J}}^{\mathscr{E}}(1_V)=\begin{pmatrix}-1&2&1&-3\\0&0&0&-1\\0&0&-1&-1\\-1&1&-1&-1\end{pmatrix} \text{ und } M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{J}}(1_V)=\begin{pmatrix}1&-4&3&-2\\1&-4&2&-1\\0&1&-1&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

die Koordinatentransformationen, wobei

$$M_{\mathscr{J}}^{\mathscr{E}}(1_V)M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\alpha)M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{J}}(1_V)=M_{\mathscr{J}}^{\mathscr{J}}(\alpha)$$

mit

$$M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\alpha)=\begin{pmatrix}1&2&3&-4\\-1&4&2&-4\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

Wichtig

Wird die berechnete Jordan-Basis in der umgekehrten Reihenfolge geschrieben, also

$$\mathscr{J}=\{j_1:=e_1+e_2,\ j_2:=-2e_1-e_2,\ j_3:=3e_1+2e_2-e_3,\ j_4:=-4e_1-4e_2+e_3-e_4\},$$

so erhalten wir eine an der Diagonalen gespiegelte Matrix $M_{\mathscr{J}}^{\mathscr{J}}(\alpha)$.

Diese Zerlegungssätze werden genau so für endliche erzeugte abelsche Gruppen verwendet.

Eine ganz andere schöne Anwendung ist die der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Ich habe diese bei einem Vortrag an einer FH verwendet. Daraufhin ein erboster Prof. „Sie würden für diese Theorie ein halbes Jahr benötigen und ich würde das in einer Doppelstunde erledigen!“ Na ja, wenn er keine Ahnung von Mathematik hat, so sollte er lieber seine Chemie, die, wie ich hörte, auch nur sehr wenige verstünden, weiter lehren. Sie sind ja auch nur ernannt und haben den Titel geschenkt bekommen. Nun denn.

Zunächst wird definiert, was unter einer Differentialgleichung zu verstehen ist. Dabei wird von dem Anfänger $\mathbf{E} = \mathbb{R}$ oder $\mathbf{E} = \mathbb{C}$ gesetzt, wobei im Falle $\mathbb{C}$ die daraus resultierende reelle Lösung genutzt wird (Euler-Formel: $\cos x + i \sin x = e^{ix}$).

Es sei U eine offene Menge in $\mathbb{R} \times \underbrace{\mathbf{E} \times \cdots \times \mathbf{E}}_{n-\text{mal}}$; es sei $\psi : U \to \mathbf{E}$ eine C^k-Abbildung, $k \geq n-1$.

Eine Gleichung

$$y^{(n)} = \psi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

heißt eine ***Differentialgleichung n-ter Ordnung***.

Eine Lösung der Differentialgleichung ist eine C^n-Funktion $f : I \to \mathbf{E}$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen oder abgeschlossen ist und folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)\right) \in U$ für alle $x \in I$;

(ii) $f^{(n)}(t) = \psi\left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)\right)$ für alle $x \in I$.

Ist $\psi : U \to \mathbf{E}$ polynomial in $\left(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, also $\psi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = \varphi(x) + p(D)\, y$ mit $p \in \mathbb{R}[X]$, wobei D den Ableitungsoperator $D(y) = y'$ bezeichnet, so sprechen wir von einer ***inhomogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten***. Die Gleichung heißt homogen, wenn $\varphi(x) \underset{x}{\equiv} 0$ ist.

In diesem Fall schreiben wir gern

$$\left(D^n - p(D)\right) y = \varphi(x) \text{ und setzen } D^n - p(D) =: q(D) \in \mathbb{R}[D].$$

Beispiel.
Gegeben sei folgende homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(5)} + y^{(4)} - 2y''' - 2y'' + y' + y = 0.$$

Auf eine Anfangsbedingung verzichte ich. Gesucht sind alle Lösungen.
Es gibt nun im Prinzip zwei Möglichkeiten diese Gleichung zu lösen.

1. Möglichkeit

Ich führe nun den Differentialoperator auf der Menge der differenzierbaren Funktionen ein. Da eine differenzierbare Funktion notwendigerweise stetig ist, sind dies die stetig differenzierbaren Funktionen. Wir werden zeigen, dass sie sogar beliebig oft differenzierbar sind.

Es sei $C^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Diese bilden mit der Addition $f+g$ für $f,g\in C^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ und Multiplikation mit reellen Zahlen $a\cdot f$, wobei $a\in\mathbb{R},\ f\in C^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, einen reellen Vektorraum.
Es sei

$$D:\begin{cases} C^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \\ \quad f \qquad\quad \mapsto Df := f' \end{cases}$$

der Differentialoperator.

Mit Hilfe des Differentialoperators und einer Lösung f schreibt sich die Gleichung

$$D^5 f + D^4 f - 2D^3 f - 2D^2 f + Df + f = 0$$

oder mit $I\cdot f = f$

$$\left(D^5 + D^4 - 2D^3 - 2D^2 + D + I\right) f = 0 .$$

Da $C^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum ist, gibt $\ker\left(D^5 + D^4 - 2D^3 - 2D^2 + D + I\right) \subset C^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ den Unterraum aller Lösungen dieser Differentialgleichung an. Mithin ist $\chi := X^5 + X^4 - 2X^3 - 2X^2 + X + 1$ das charakteristische Polynom. Wir sehen, dass $C^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ vermöge $X\cdot f := Df$ ein $\boldsymbol{K}[X]$-Modul ist. Eine Funktion f heißt Eigenfunktion zum Eigenwert λ, wenn $f\in\ker(D-\lambda I)$ bzw. $f'(x)=\lambda\cdot f(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ erfüllt ist. Eine solche Funktion ist uns bekannt, nämlich $f(x)=r\cdot e^{\lambda x}$ mit $r\in\mathbb{R}$.
Wegen

$$\begin{aligned}(D-\lambda_2 I)(D-\lambda_1 I)f &= (D-\lambda_2 I)(Df-\lambda_1 f) = (D-\lambda_2 I)(f'-\lambda_1 f)\\ &= D(f'-\lambda_1 f) - \lambda_2(f'-\lambda_1 f) = Df' - \lambda_1 Df - \lambda_2 f' - \lambda_2\lambda_1 f\\ &= f'' - \lambda_1 f' - \lambda_2 f' - \lambda_2\lambda_1 f,\end{aligned}$$

stimmt dies mit

$$(D-\lambda_2 I)(D-\lambda_1 I)f = \left(D^2 - \lambda_1 D - \lambda_2 D - \lambda_2\lambda_1 I\right) f$$

überein.
Wird f schon von einem Teiler des charakteristischen Polynoms kleineren Grades annulliert, so ist f auch eine Lösung der Differentialgleichung, da

$$\chi_D f = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i D^i\right)\left(\sum_{i=0}^{l} b_1 D^i\right) f = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i D^i\right)\left(\sum_{i=0}^{l} b_1 D^i f\right) = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i D^i\right) 0 = 0 .$$

Hierbei sind $a_k = b_l = 1$ und 0 die Nullfunktion $0(x) := 0$ für alle x.

Was sind nun verallgemeinerte Eigenfunktionen, also $g\in\ker\left((D-\lambda I)^k\right)$?

Wir wissen $(D-\lambda I)\left(e^{\lambda x} f\right) = D\left(e^{\lambda x} f\right) - \lambda I\left(e^{\lambda x} f\right) = \lambda e^{\lambda x} f + e^{\lambda x} Df - \lambda e^{\lambda x} f = e^{\lambda x} Df$. Folglich ist $(D-\lambda I)^2\left(e^{\lambda x} f\right) = (D-\lambda I)\left(e^{\lambda x} Df\right) = e^{\lambda x} D(Df) = e^{\lambda x}\left(D^2 f\right)$. Per Induktion folgt also $(D-\lambda I)^k\left(e^{\lambda x} f\right) = e^{\lambda x}\left(D^k f\right)$. Setzen wir nun $f := e^{-\lambda x} g$, so folgt wegen $e^{\lambda x} e^{-\lambda x} = 1$

$$(D-\lambda I)^k(g)=e^{\lambda x}\left(D^k\left(e^{-\lambda x}g\right)\right).$$

$g\in\ker\left((D-\lambda I)^k\right)$ ist somit genau dann verallgemeinerte Eigenfunktion zu dem Eigenwert λ, wenn $D^k\left(e^{-\lambda x}g\right)=0$ erfüllt ist. Dies sind aber gerade die ganzrationalen Funktionen vom Grade kleiner als *k*, wie durch einfaches Integrieren gezeigt wird. Es darf auch via Stammfunktionen argumentiert werden. Mithin ist

$$e^{-\lambda x}g=\sum_{i=0}^{k-1}a_ix^i\Leftrightarrow g=e^{\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}a_ix^i.$$

Wir haben gezeigt:

$$g\in\ker\left((D-\lambda I)^k\right)\Leftrightarrow g=e^{\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}a_ix^i$$

ist verallgemeinerte Eigenfunktion zum Eigenwert λ.

Kommen wir zurück zu der eigentlichen Aufgabe.

$$y^{(5)}+y^{(4)}-2y'''-2y''+y'+y=0$$

liefert das charakteristische Polynom

$$\chi_D=X^5+X^4-2X^3-2X^2+X+1.$$

Wir sehen, dass je zwei aufeinanderfolgende Terme X^5+X^4, $-2X^3-2X^2$ und $X+1$ gleiche Koeffizienten besitzen. Es gilt folglich $\chi_D(-1)=0$. Da wir weitere Teiler von 1 überprüfen, sehen wir auch $\chi_D(+1)=0$. Die Nullstelle -1 könnte auch doppelt vorkommen. Leiten wir das Polynom ab, versehen es aber mit einem Punkt.

$$\dot{\chi}_D=5X^4+4X^3-6X^2-4X+1\Rightarrow\dot{\chi}_D(-1)=5-4-6+4+1=0 \text{ und}$$
$$\dot{\chi}_D(1)=5+4-6-4+1=0$$

Schauen wir uns noch die zweite Ableitung an.

$$\ddot{\chi}_D=20X^3+12X^2-12X-4\quad\Rightarrow\quad\ddot{\chi}_D(-1)=-20+12+12-4=0$$

Das charakteristische Polynom besitzt folglich eine dreifache Nullstelle in -1 und eine doppelte Nullstelle in 1. Damit gilt

$$\chi_D=(X+1)^3(X-1)^2.$$

Die Lösungen lauten:

$$g\in\ker\left((D+I)^3\right)\Leftrightarrow g(x)=e^{-x}\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)\wedge h\in\ker\left((D-I)^2\right)\Leftrightarrow h(x)=e^x\left(b_0+b_1x\right)$$

und folglich die allgemeine Lösung

$$f(x)=e^{-x}\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)+e^x\left(b_0+b_1x\right).$$

Hat das charakteristische Polynom eine komplexe Nullstelle, so auch die konjugiert komplexe Nullstelle. Dies liefert $e^{(a+ib)x}=e^{ax}e^{ibx}$ und $e^{(a-ib)x}=e^{ax}e^{-ibx}$. Mit Euler $\cos x+i\sin x=e^{ix}$ finden wir $e^{ax}\cos bx=\frac{1}{2}e^{ax}\left(e^{ibx}+e^{-ibx}\right)$ und $e^{ax}\sin bx=-\frac{1}{2}ie^{ax}\left(e^{ibx}-e^{-ibx}\right)$ als reelle Lösungen.

2. Möglichkeit

Wir schreiben die Gleichung $y^{(5)}+y^{(4)}-2y'''-2y''+y'+y=0$ in Matrizenform.

$$\begin{pmatrix} y^{(5)} \\ y^{(4)} \\ y''' \\ y'' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{(4)} \\ y''' \\ y'' \\ y' \\ y \end{pmatrix} \text{ kurz } Y'=MY \text{ und } \begin{pmatrix} y^{(5)} \\ y^{(4)} \\ y''' \\ y'' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{(4)} \\ y''' \\ y'' \\ y' \\ y \end{pmatrix}$$

Ist $F(x)=(c_1,\ldots,c_n)^T\cdot e^{\lambda x}$ eine Lösung der Differentialgleichung $Y'=MY$, so gilt mit $F'(x)=\lambda\cdot(c_1,\ldots,c_n)^T\cdot e^{\lambda x}$ die Gleichung

$$M(c_1,\ldots,c_n)^T\cdot e^{\lambda x}=\lambda\cdot(c_1,\ldots,c_n)^T\cdot e^{\lambda x}\Leftrightarrow M(c_1,\ldots,c_n)^T=\lambda\cdot(c_1,\ldots,c_n)^T.$$

Mit anderen Worten: $(c_1,\ldots,c_n)^T$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Verfahren wir daher mit der Matrix wie gehabt, um das charakteristische Polynom zu berechnen.

$$XE-M=\begin{pmatrix} X+1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X \end{pmatrix}$$

Ich permutiere die Zeilen im Zyklus $P_{4.1,2,3}^{1,2,3,4}$ und führe anschließend Zeilenumformungen durch.

$$\begin{pmatrix} -1 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X \\ X+1 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_5^1(X+1)$, $A_5^2(X(X+1)-2)$, $A_5^3((X-2)(X+1))$, $A_5^4(X(X-2)(X+1)+1)$ liefert

$$\begin{pmatrix} -1 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X^4(X+1)-2X^2(X+1)+X+1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi=(X+1)(X^4-2X^2+1)=(X+1)(X^2-1)^2=(X+1)^3(X-1)^2.$$

Sind die erzeugenden Eigenfunktionen der Kerne bekannt, kann die Lösung für

$$y^{(5)}+y^{(4)}-2y'''-2y''+y'+y=0$$

notiert werden (siehe oben).

Wir wollen jedoch noch eine Lösung für $Y'=MY$ angeben, wobei $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)^T$.

Dazu berechnen wir

$$P^{-1} = P_{2.3,4,1}^{1,2,3,4} A_5^1\left(-(X+1)\right) A_5^2\left(-X(X+1)+2\right) A_5^3\left(-(X-2)(X+1)\right) A_5^4\left(-X(X-2)(X+1)-1\right).$$

Dies liefert die Matrix

$$\begin{pmatrix} -(X+1) & -X(X+1)+2 & -(X^2-2)(X+1) & -X(X^2-2)(X+1)-1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nur der letzte Eintrag liefert einen erzeugenden Vektor. Wir berechnen die Jordan-Basis.

$$(X+1)^3 \cdot e_1 = (M+1)^3 \cdot e_1 = 4e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4$$

ist ein erzeugender Vektor für den zyklischen Raum zum Eigenwert 1 mit dem Eigenvektor

$$(X-1)\cdot\left(4e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4\right) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5.$$

Andererseits ist

$$(X-1)^2 \cdot e_1 = 6e_1 - 3e_2 + e_3$$

ein erzeugender Vektor für den zyklischen Raum zum Eigenwert -1, der

$$(X+1)\cdot\left(6e_1 - 3e_2 + e_3\right) = -4e_1 + 3e_2 - 2e_3 + e_4$$

und den Eigenvektor

$$(X+1)\cdot\left(-4e_1 + 3e_2 - 2e_3 + e_4\right) = e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5$$

enthält. Wir erhalten folgende Jordan-Basis

$$\mathscr{J} = \{ j_1 := 6e_1 - 3e_2 + e_3,\ j_2 := -4e_1 + 3e_2 - 2e_3 + e_4,\ j_3 := e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5, \\ j_4 := 4e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4,\ j_5 := e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \}$$

und der Jordan-Form

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt

$$\frac{1}{64}\begin{pmatrix} 16 & 0 & -32 & 0 & 16 \\ 16 & 16 & -48 & -16 & 32 \\ 12 & 16 & -24 & -48 & 44 \\ 8 & 16 & 0 & -16 & -8 \\ -12 & -16 & 24 & 48 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier können schon die Lösungen angegeben werden, wenn Fundamentallösungen bekannt sind. Wir wissen doch, dass $(X+1)\,j_1 = j_2$, $(X+1)\,j_2 = j_3$ und $(X+1)\,j_3 = 0$ sind. Ersetzen wir X durch D, so sind Funktionen φ gesucht mit

$$\begin{aligned}\varphi_1'(x) &= -\varphi_1(x)+\varphi_2(x),\\ \varphi_2'(x) &= -\varphi_2(x)+\varphi_3(x),\\ \varphi_3'(x) &= -\varphi_3(x).\end{aligned}$$

Setzen wir $\varphi_1(x)=\frac{1}{2!}x^2e^{-x}$, so folgt $\varphi_1'(x)=-\frac{1}{2!}x^2e^{-x}+xe^{-x}$, also $\varphi_2(x)=xe^{-x}$. Entsprechend folgt $\varphi_3(x)=e^{-x}$. Damit kann die allgemeine Lösung für die Jordan Form angegeben werden. Sie lautet in der Basis $\mathscr{J}$

$$F(x)=c_1\begin{pmatrix}1\\x\\\frac{1}{2}x^2\\0\\0\end{pmatrix}e^{-x}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\x\\0\\0\end{pmatrix}e^{-x}+c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}e^{-x}+c_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\x\end{pmatrix}e^{x}+c_5\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}e^{x}.$$

Die Lösung der Ursprungsgleichung in der kanonischen Basis erhalten wir über die Gleichung (vgl. Seite 20 unten) $C^{-1}MC=J \Leftrightarrow M=CJC^{-1}$, nämlich $CF(x)$.

Gehen wir direkt von einer $Y'=MY$ aus und wollen direkt eine Lösungsmatrix angeben, so ist dies selbstverständlich möglich. Formal ist $F(x)=e^{Mx}$ wegen $F'(x)=Me^{Mx}=MF(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung.

In diesem Zusammenhang von Exponentialfunktionen von Matrizen verweise ich auf die einschlägige Literatur, z. B. Walter, Seite 118ff. Es gilt $e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$ für jede Matrix A.

Also gilt für die Matrix

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

die Exponentialdarstellung

$$e^A=\begin{pmatrix}e^{-1}&0&0&0&0\\0&e^{-1}&0&0&0\\0&0&e^{-1}&0&0\\0&0&0&e^{1}&0\\0&0&0&0&e^{1}\end{pmatrix}.$$

Die Matrix

$$N=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

ist eine nilpotente Matrix mit $N^k = 0$ für alle $k \geq 3$. Es folgt mit $e^N = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}N^n = \sum_{n=0}^{2}\frac{1}{n!}N^n$.

$$\begin{aligned}
e^{Nx} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(Nx)^n = E + Nx + \tfrac{1}{2}N^2x^2\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\x&0&0&0&0\\0&x&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&x&0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\x^2&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\x&1&0&0&0\\\tfrac{1}{2}x^2&x&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&x&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nun ist jedoch $J = A + N$ und damit
$F(x) = e^{Jx} = e^{Ax+Nx} = e^{Ax}e^{Nx}$.
Wir erhalten

$$F(x)=\begin{pmatrix}e^{-x}&0&0&0&0\\0&e^{-x}&0&0&0\\0&0&e^{-x}&0&0\\0&0&0&e^{x}&0\\0&0&0&0&e^{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\x&1&0&0&0\\\frac{1}{2}x^2&x&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&x&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-x}&0&0&0&0\\xe^{-x}&e^{-x}&0&0&0\\\frac{1}{2}x^2e^{-x}&xe^{-x}&e^{-x}&0&0\\0&0&0&e^{x}&0\\0&0&0&xe^{x}&e^{x}\end{pmatrix}$$

Mit $G(x) := e^{Mx}$ folgt $G'(x) = Me^{Mx} = MG(x)$. $G(x)$ erfüllt folglich die Differentialgleichung $Y' = MY$. Gilt $J := C^{-1}MC$, so auch $J^k = C^{-1}M^kC$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und somit auch $e^{Jx} = e^{C^{-1}MCx} = e^{C^{-1}MxC} = C^{-1}e^{Mx}C$, da $Lx = xL$ für jede Matrix L und $x \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Die Funktion $H(x) := e^{Jx}$ liefert $H'(x) = Je^{Jx}$, erfüllt also die Differentialgleichung $Y' = JY$. Wegen $\left(CJC^{-1}\right)Ce^{Jx}C^{-1} = Me^{Mx}$ erhalten wir hieraus die Lösung für $Y' = MY$. Diese hatten wir oben schon angedeutet.

Natürlich ist auch der umgekehrte Weg möglich, um aus einem System $Y' = MY$ eine Differentialgleichung zu erstellen. Dazu betrachten wir nur ein alles umfassendes Beispiel.

Beispiel

Gegeben ist das homogene lineare Differentialgleichungssystem mit konstanter Matrix. Gesucht ist die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Es ist egal, nach welcher Unbekannten aufgelöst wird. Lösen wir nach z auf.

$$\begin{aligned} z'' &= -4x' + 3y' - 2z' \\ &= -4(-x+2y-3z) + 3(x-y+z) - 2z' \\ &= 7x - 11y + 15z - 2z' \end{aligned}$$

Eliminieren wir die Unbekannte y.

$$\begin{aligned} z'' + 2z' - 15z = 7x - 11y &\Leftrightarrow 3z'' + 6z' - 45z = 21x - 11\cdot 3y \\ &\Leftrightarrow 3z'' + 6z' - 45z = 21x - 11\cdot(z' + 4x + 2z) \\ &\Leftrightarrow 3z'' + 17z' - 23z = -23x \end{aligned}$$

Wir bilden die 3. Ableitung, eliminieren wieder y und fassen zusammen

$$\begin{aligned} & z''' + 2z'' = -4(-x' + 2y' - 3z') + 3(x' - y' + z') \\ \Leftrightarrow\ & z''' + 2z'' - 15z' = 7x' - 11y' \\ \Leftrightarrow\ & z''' + 2z'' - 15z' = 7(-x + 2y - 3z) - 11(x - y + z) \\ \Leftrightarrow\ & z''' + 2z'' - 15z' + 32z = -18x + 25y \\ \Leftrightarrow\ & 3z''' + 6z'' - 45z' + 96z = -54x + 25\cdot 3y \\ \Leftrightarrow\ & 3z''' + 6z'' - 45z' + 96z = -54x + 25\cdot(z' + 4x + 2z) \\ \Leftrightarrow\ & 3z''' + 6z'' - 70z' + 46z = 46x = -6z'' - 34z' + 46z \\ \Leftrightarrow\ & 3z''' + 12z'' - 36z' = 0 \\ \Leftrightarrow\ & z''' + 4z'' - 12z' = 0 \end{aligned}$$

Nach „langer“ Rechnung haben wir die homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gefunden (falls wir uns nicht verrechnen!).

$$z''' + 4z'' - 12z' = 0 \Leftrightarrow (D^3 + 4D^2 - 12D)z = 0$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi = X\left[(X+2)^2 - 4^2\right] = X(X-2)(X+6).$$

Spätestens an dieser Stelle geht uns ein Licht auf.

Ich stelle die charakteristische Gleichung auf.

$$\chi = \det\begin{pmatrix} X+1 & -2 & 3 \\ -1 & X+1 & -1 \\ 4 & -3 & X+2 \end{pmatrix} = X(X-2)(X+6)$$

Die gesuchte Gleichung lautet

$$\chi(D)\,y = D(D-2)(D+6)\,y = (D^3 + 4D^2 - 12D)\,y = 0 \Leftrightarrow y''' + 4y'' - 12y' = 0.$$

Betrachten wir noch einmal rückwärtig unsere Ausgangsmatrix als Differentialgleichung $Y' = MY$.

$$M_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mit der Basis

$$\mathscr{J} = \{ j_1 := e_2 - e_3,\ j_2 := -e_3,\ j_3 := e_3 - e_4,\ j_4 := -e_1 + e_2 - e_4 \}$$

und der Jordan-Form

$$M_{\mathscr{J}}^{\mathscr{J}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine homogene Lösung lautet

$$F(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} e^x + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Wie wir sehen, ist alles gesagt.

Literatur

Anderson/Fuller: Rings and Categories of Modules, Springer, 1973, ISBN 3-540-90070-5

Auslander/Buchsbaum: Groups, Rings, Modules, Harper & Row, 1974, SBN 06-040387-X

Bourbaki: Algebra II, Chapters 4-7, Modules over principal ideal domains, Springer

Greub: Linear Algebra, Fourth Edition, p. 351ff, Springer 1975, ISBN 3-540-90110-8

Klingenberg/Klein: Lineare Algebra und analytische Geometrie, BI, S. 142ff, ISBN 3-411-00749-4

Koecher: Lineare Algebra und analytische Geometrie, Springer-Verlag, 1983, ISBN 3-540-12572-8

Lang: Linear Algebra

Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer, 1972, ISBN 3-540-05867-2

Literatur zu diesem Thema gibt es wie Sand am Meer. Nicht jedes Buch gefällt. Daher hier nur eine kleine Auswahl. Selber suchen und verschiedene Bücher lesen bringt den Erfolg.