Die orthogonale Projektion eines Vektors auf einen anderen

Parallelogramm-Regel

Wer keine Motivation mag, gehe gleich zu der Seite 7.

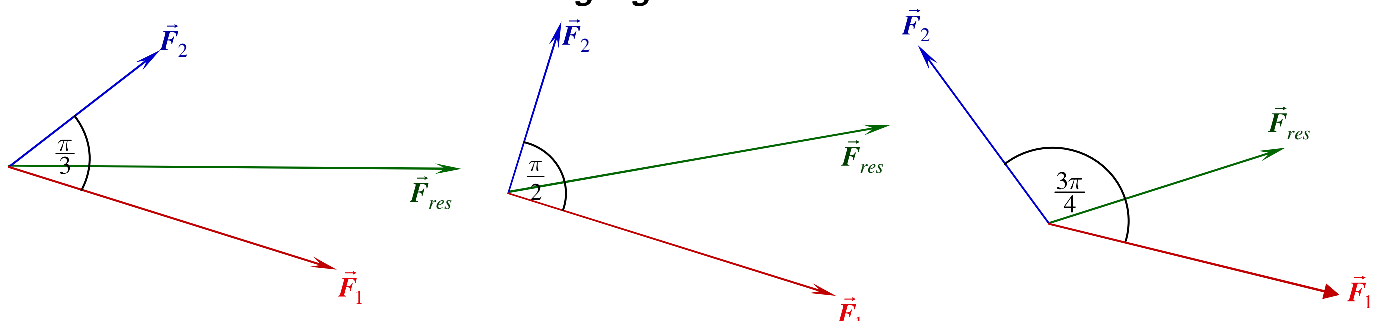
Einführendes Beispiel

Zwei Kräfte greifen in einem Punkt an. Wie groß ist die resultierende Kraft, die angreifen muss, um die beiden zu ersetzen, damit dieselbe Wirkung entsteht.

Wir betrachten dazu »drei« Beispiele.

1. $0 \le \sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right) < \frac{\pi}{2}$
2. $\sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right) = \frac{\pi}{2}$
3. $\frac{\pi}{2} < \sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right) \le \pi$

Ausgangssituationen



Figur 1

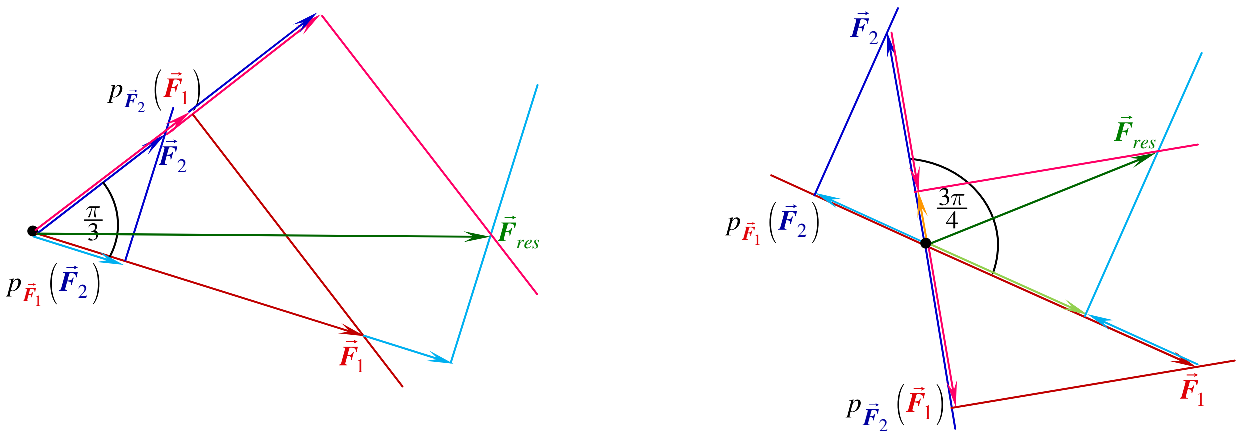
Analyse der Situationen

Zunächst wollen wir einsehen, warum Kräfte nach der Parallelogramm-Regel addiert werden dürfen. Dazu gehen wir mit „moderner" Mathematik zurück zu den Ursprüngen.

Wie wirkt sich die eine Kraft auf die andere Kraft aus?

Die Antwort finden wir in den Projektionen der Kräfte auf die jeweils andere wieder.

Zunächst fällt oberflächlich betrachtet auf, dass im ersten Beispiel jede Kraft die andere verstärkt. Zwei relativ kleine Kräfte bewirken eine „große" resultierende Kraft. Im zweiten Beispiel stärkt oder schwächt keine Kraft die andere. Sie stehen orthogonal aufeinander. Und im dritten Beispiel schwächt jede Kraft die andere. Sie wirken gegensätzlich. Zwei relativ große Kräfte bewirken eine „kleine" resultierende Kraft.



Figur 2

In diesen Zeichnungen hat nicht jeder Vektor bzw. Pfeil eine Bezeichnung. Damit die Übersicht erhalten bleibt, sind gleichfarbige Pfeile von Länge und Richtung identisch.

Zur mathematischen Beschreibung bietet sich das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren an. Stehen die Vektoren in einem spitzen Winkel zueinander, so ist das Skalarprodukt positiv. Im rechten Winkel null. Bilden sie einen stumpfen Winkel, so ist das Ergebnis negativ. Wir definieren daher die senkrechte Projektion eines Vektors auf einen anderen durch

$$p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right) := \left(\frac{\vec{F}_1}{\left\|\vec{F}_1\right\|}\cdot\vec{F}_2\right)\frac{\vec{F}_1}{\left\|\vec{F}_1\right\|} = \left(\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2\right)\frac{\vec{F}_1}{\left\|\vec{F}_1\right\|^2}.$$

Der Punkt steht für das kanonische Skalarprodukt $\vec{F}\cdot\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} F_i F_i$ und die Norm ist durch $\left\|\vec{F}\right\| = \sqrt{\vec{F}\cdot\vec{F}}$ definiert. Natürlich gilt $\vec{F}_2 - p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right) \perp \vec{F}_1$, wie durch Nachrechnen schnell gezeigt ist. $\vec{F}_2 - p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)$, wie auch $\vec{F}_1 - p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)$ sind die Höhen in einem Parallelogramm. Die Projektion misst folglich die Auswirkung eines Vektors auf einen anderen. Wird die Projektion skalar mit $\vec{F}_1$ multipliziert, so erhalten wir $p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)\cdot\vec{F}_1 = \vec{F}_1\cdot\vec{F}_2$.

Wird $\vec{F}_2$ längs $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_1$ längs $\vec{F}_2$ parallelverschoben, so entsteht ein Parallelogramm. Dann ist $\vec{F}_2 - p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)$ der Höhenvektor auf $\vec{F}_1$.

Berechnung der Winkel und des resultierenden Vektors

Bezeichnen wir die Winkel mit $\sphericalangle\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right)$, $\sphericalangle\left(\vec{F}_1,\vec{F}_{res}\right)$ und $\sphericalangle\left(\vec{F}_{res},\vec{F}_2\right)$, so dass gilt

$$\sphericalangle\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right) = \sphericalangle\left(\vec{F}_1,\vec{F}_{res}\right) + \sphericalangle\left(\vec{F}_{res},\vec{F}_2\right).$$

In die Richtung der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ wirken zusätzlich die Projektionen der anderen. Dies sind die linken Seiten der Gleichungen. Folglich muss die Projektion der resultierenden Kraft genau so groß sein. Dies sind die rechten Seiten. Insbesondere steht in jeder Gleichung eine Linearkombination der Kraft $\vec{F}_1$ bzw. $\vec{F}_2$ wie beim Tauziehen (rechte Seite wäre mit -1 zu multiplizieren, damit alle Kräfte im Gleichgewicht sind). Summe aller Kräfte ist null.

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right) &= p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_{res}\right)\\ \vec{F}_2 + p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right) &= p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_{res}\right)\end{aligned}$$

Da die rechten Seiten die Projektionen der resultierenden Kraft sind, kann dadurch ***auch*** die resultierende Kraft berechnet werden. Aus diesen beiden erhalten wir durch Skalarmultiplikation und anschließender Addition

$$\left.\begin{aligned}F_1^2 + \vec{F}_1\cdot\vec{F}_2 &= \vec{F}_1\cdot\vec{F}_{res}\\ F_1^2 + \vec{F}_1\cdot\vec{F}_2 &= \vec{F}_2\cdot\vec{F}_{res}\end{aligned}\right\} \Rightarrow F_1^2 + 2\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2 + F_1^2 = \left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)\cdot\vec{F}_{res} \Leftrightarrow \left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)\cdot\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right) = \left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)\cdot\vec{F}_{res}.$$

Natürlich gilt $\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ und mit dem Skalarprodukt erhalten wir den ***Kosinussatz***.

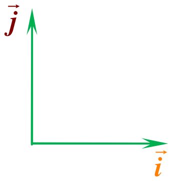
$$\begin{aligned}\vec{F}_{res}\cdot\vec{F}_{res} &= \left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)\cdot\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)\\ &= \vec{F}_1\cdot\vec{F}_1 + \vec{F}_2\cdot\vec{F}_2 + 2\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2\end{aligned}$$

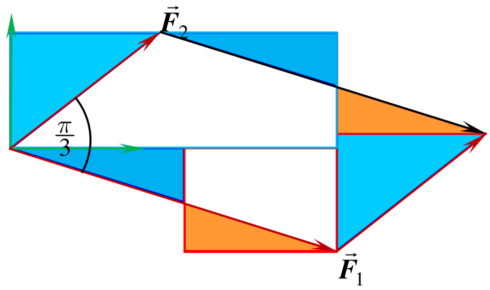
$$\left\|\vec{F}_{res}\right\|^2 = \left\|\vec{F}_1\right\|^2 + \left\|\vec{F}_2\right\|^2 + 2\left\|\vec{F}_1\right\|\left\|\vec{F}_2\right\|\cos\sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right) \text{ oder } F_{res}^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right)$$

Beispiel

Die Flächenberechnung lässt sich im 2D gut visualisieren. Die weißen Flächen im Parallelogramm sind schon durch die Rechtecke vorhanden.

$$\vec{F}_1 = f_1\vec{i} + f_2\vec{j},$$
$$\vec{F}_2 = f_1\vec{i} + f_2\vec{j},$$
$$\vec{F}_1 \times \vec{F}_2 = (f_1 f_2 - f_2 f_1)\vec{i} \times \vec{j}.$$





$\vec{F}_2 - p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right) = \vec{F}_2 - \left(\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2\right)\frac{\vec{F}_1}{\left\|\vec{F}_1\right\|^2}$ (Höhe auf $\vec{F}_1$)

Der Flächeninhalt ist folglich $\left\|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\right\| = \left|f_1 f_2 - f_2 f_1\right| = \left\|\vec{F}_1\right\|\left\|\vec{F}_2 - p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)\right\|$, da $\vec{i} \times \vec{j}$ ein Einheitsquadrat mit einer Flächeneinheit von $\left\|\vec{i} \times \vec{j}\right\| = 1\mathrm{FE}$ darstellt. ***Beispiel Ende***

In dem ***Körper der Quaternionen*** $\mathbb{H}$ - nach *William. R. Hamilton* – wird jede Zahl als $\boldsymbol{h} = r + a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ geschrieben. Dieser Körper ist nicht kommutativ. Es gilt $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$, $\boldsymbol{ijk} = -1$. Dann folgt $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}$. Außerdem $\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji}$, $\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj}$, sowie $\boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik}$.

Die ***Beweise*** sind einfach:

$\boldsymbol{ijk} = -1 \Rightarrow \boldsymbol{ijkk} = -\boldsymbol{k} \Rightarrow \boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{ijk} = -1 \Rightarrow \boldsymbol{iijk} = -\boldsymbol{i} \Rightarrow \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i} \Rightarrow \boldsymbol{jjki} = \boldsymbol{jii} \Rightarrow \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}$.

$\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k} \wedge -\boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{j} \Rightarrow \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji}$, $\boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i} \wedge -\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{k} \Rightarrow \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj}$, $\boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j} \wedge -\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{i} \Rightarrow \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik}$.

Durch die Einführung der Vektoren wurde die Multiplikation durch $\times$ ersetzt und ein Flächenelement durch ein Linienelement ersetzt, wobei die Einheit beibehalten wurde. Die geometrische Bedeutung der Physik ging dabei völlig verloren. Leider! Erst durch Einführung der von *H. Graßmann* – nach seinem Tod, da ihn *L. Kronecker* so lange bekämpfte, - verbesserten Darstellung durch *E. Cartan* et. al. In die Theorie der alternierenden Multilinearformen sowie Differentialformen, gelang es die Geometrie wieder zu gewinnen. Der eigentliche Gedanke von Hamilton ging jedoch unter. Heute gewinnt er endlich wieder in der Robotik an Bedeutung. Leider im Chaos. Es wird ziemlich viel durcheinander geworfen.

Mit $\vec{F} = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}$ folgt

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 \times \vec{F}_2 &= \left(F_{1,1}\boldsymbol{i} + F_{1,2}\boldsymbol{j} + F_{1,3}\boldsymbol{k}\right)\times\left(F_{2,1}\boldsymbol{i} + F_{2,2}\boldsymbol{j} + F_{2,3}\boldsymbol{k}\right)\\ &= \left(F_{1,1}F_{2,2} - F_{2,1}F_{1,2}\right)\boldsymbol{k} + \left(F_{1,2}F_{2,3} - F_{2,2}F_{1,3}\right)\boldsymbol{i} + \left(F_{1,1}F_{2,3} - F_{2,1}F_{1,3}\right)\boldsymbol{j}\\ &= \left(F_{1,2}F_{2,3} - F_{2,2}F_{1,3}\right)\boldsymbol{i} + \left(F_{1,3}F_{2,1} - F_{2,3}F_{1,1}\right)\boldsymbol{j} + \left(F_{1,1}F_{2,2} - F_{2,1}F_{1,2}\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

Das Kreuzprodukt zeigt die Gleichheit der Flächeninhalte

$$\vec{F}_{res} \times \vec{F}_1 = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)\times\vec{F}_1 = \vec{F}_2 \times \vec{F}_1$$
$$\vec{F}_{res} \times \vec{F}_2 = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)\times\vec{F}_2 = \vec{F}_1 \times \vec{F}_2$$

$$\left\|\vec{F}_{res} \times \vec{F}_1\right\| = \left\|\vec{F}_2 \times \vec{F}_1\right\| = \left\|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\right\| = \left\|\vec{F}_{res} \times \vec{F}_2\right\|$$

und damit $\left\|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\right\| = \left\|\vec{F}_1\right\|\left\|\vec{F}_2\right\|\sin\sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right)$.

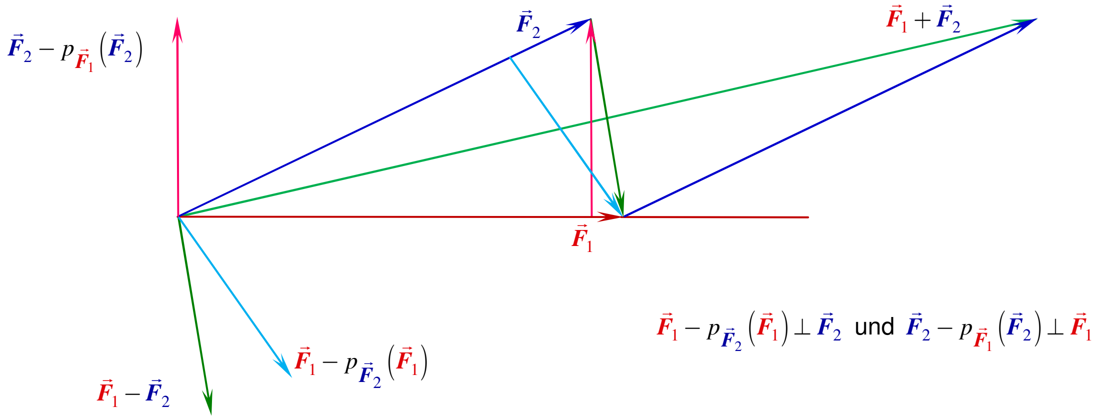
Wegen $0 \le \sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right) \le \pi$ und $0 \le \sin\sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right) \le 1$ ‚kann' ein „Sinusvektor" nun wie folgt definiert werden. Der Höhenvektor wird durch Länge des anliegenden Vektors (Hypotenuse) dividiert.

$$\frac{\vec{F}_1 - p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)}{\left\|\vec{F}_1\right\|} \text{ bzw. } \frac{\vec{F}_2 - p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)}{\left\|\vec{F}_2\right\|}$$

Da

$$\left\|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\right\| = \left\|\vec{F}_1\right\| \left\|\vec{F}_2 - p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)\right\| = \left\|\vec{F}_1 - p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)\right\| \left\|\vec{F}_2\right\|,$$

der Flächeninhalt des Parallelogramms ist, definiert auch $\dfrac{\vec{F}_1 \times \vec{F}_2}{\left\|\vec{F}_1\right\|\left\|\vec{F}_2\right\|}$ einen Sinusvektor.



Wir erhalten

$$\vec{s}^{\perp} = \frac{\vec{F}_1 \times \vec{F}_2}{\left\|\vec{F}_1\right\|\left\|\vec{F}_2\right\|} = \frac{\left\|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\right\|}{\left\|\vec{F}_1\right\|\left\|\vec{F}_2\right\|} \frac{\vec{F}_1 \times \vec{F}_2}{\left\|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\right\|} = \sin \sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right) \frac{\vec{F}_1 \times \vec{F}_2}{\left\|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\right\|}, \qquad \sin \sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right) = \frac{\left\|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\right\|}{\left\|\vec{F}_1\right\|\left\|\vec{F}_2\right\|}.$$

Entsprechend

$$\sin \sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_1 - \vec{F}_2\right) = \frac{\left\|\vec{F}_1 \times \left(\vec{F}_1 - \vec{F}_2\right)\right\|}{\left\|\vec{F}_1\right\|\left\|\vec{F}_1 - \vec{F}_2\right\|} = \frac{\left\|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\right\|}{\left\|\vec{F}_1\right\|\left\|\vec{F}_1 - \vec{F}_2\right\|}, \quad \sin \sphericalangle\left(\vec{F}_2;\vec{F}_2 - \vec{F}_1\right) = \frac{\left\|\vec{F}_2 \times \left(\vec{F}_2 - \vec{F}_1\right)\right\|}{\left\|\vec{F}_2\right\|\left\|\vec{F}_2 - \vec{F}_1\right\|} = \frac{\left\|\vec{F}_2 \times \vec{F}_1\right\|}{\left\|\vec{F}_2\right\|\left\|\vec{F}_2 - \vec{F}_1\right\|}.$$

Die zwei Darstellungen in den Winkelfunktionen ergeben

$$\vec{s}_{\vec{F}_2} \sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right) = \frac{\vec{F}_1}{\left\|\vec{F}_1\right\|} - p_{\vec{F}_2}\left(\frac{\vec{F}_1}{\left\|\vec{F}_1\right\|}\right) = \frac{\vec{F}_1 - p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)}{\left\|\vec{F}_1\right\|} = \sin \sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right) \frac{\vec{F}_1 - p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)}{\left\|\vec{F}_1 - p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)\right\|},$$

$$\vec{s}_{\vec{F}_1} \sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right) = \frac{\vec{F}_2}{\left\|\vec{F}_2\right\|} - p_{\vec{F}_1}\left(\frac{\vec{F}_2}{\left\|\vec{F}_2\right\|}\right) = \frac{\vec{F}_2 - p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)}{\left\|\vec{F}_2\right\|} = \sin \sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right) \frac{\vec{F}_2 - p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)}{\left\|\vec{F}_2 - p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)\right\|},$$

$$\sin \sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right) = \frac{\left\|\vec{F}_1 - p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)\right\|}{\left\|\vec{F}_1\right\|} = \frac{\left\|\vec{F}_2 - p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)\right\|}{\left\|\vec{F}_2\right\|}.$$

Da $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2 \perp \vec{F}_1$ und $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2 \perp \vec{F}_2$ gilt $\left(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\right) \cdot \left(\vec{F}_2 - p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)\right) = 0$ und $\left(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\right) \cdot \left(\vec{F}_1 - p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)\right)$, also $\vec{s}^{\perp} \cdot \vec{s}_{\vec{F}_1} = 0$ sowie $\vec{s}^{\perp} \cdot \vec{s}_{\vec{F}_2} = 0$.

Mit $\sin \sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_1 - \vec{F}_2\right) = \dfrac{\left\|\vec{F}_2 - p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)\right\|}{\left\|\vec{F}_1 - \vec{F}_2\right\|}$ und $\sin \sphericalangle\left(\vec{F}_2;\vec{F}_2 - \vec{F}_1\right) = \dfrac{\left\|\vec{F}_1 - p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)\right\|}{\left\|\vec{F}_2 - \vec{F}_1\right\|}$ folgt der ***Sinussatz***.

$$\frac{\sin \sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right)}{\left\|\vec{F}_2 - \vec{F}_1\right\|} = \frac{\sin \sphericalangle\left(\vec{F}_2;\vec{F}_2 - \vec{F}_1\right)}{\left\|\vec{F}_1\right\|} = \frac{\sin \sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_1 - \vec{F}_2\right)}{\left\|\vec{F}_2\right\|}.$$

Für den Tangens gilt

$$\begin{aligned}
\tan\sphericalangle\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right) &= \frac{\left\|\vec{F}_1-p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)\right\|}{\left\|p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)\right\|} = \frac{\left\|\vec{F}_2-p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)\right\|}{\left\|p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)\right\|},\\
\tan\sphericalangle\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2;\vec{F}_1\right) &= \frac{\left\|\vec{F}_1+\vec{F}_2-p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)\right\|}{\left\|p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)\right\|} = \frac{\left\|\vec{F}_2-p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)\right\|}{\left\|\vec{F}_1+p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)\right\|} = \frac{\left\|\vec{F}_1-p_{\vec{F}_1+\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)\right\|}{\left\|p_{\vec{F}_1+\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)\right\|},\\
\tan\sphericalangle\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2;\vec{F}_2\right) &= \frac{\left\|\vec{F}_1+\vec{F}_2-p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)\right\|}{\left\|p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)\right\|} = \frac{\left\|\vec{F}_1-p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)\right\|}{\left\|p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)+\vec{F}_2\right\|} = \frac{\left\|\vec{F}_2-p_{\vec{F}_1+\vec{F}_2}\left(\vec{F}_2\right)\right\|}{\left\|p_{\vec{F}_1+\vec{F}_2}\left(\vec{F}_2\right)\right\|},
\end{aligned}$$

da $p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)=p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)+p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_2\right)=p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)+\vec{F}_2$. Natürlich ist $\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{F}_{res}$. Für die Differenz gilt entsprechend

$$\begin{aligned}
\tan\sphericalangle\left(\vec{F}_1-\vec{F}_2;\vec{F}_1\right) &= \frac{\left\|\vec{F}_1-\vec{F}_2-p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_1-\vec{F}_2\right)\right\|}{\left\|p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_1-\vec{F}_2\right)\right\|} = \frac{\left\|\vec{F}_2-p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)\right\|}{\left\|\vec{F}_1-p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)\right\|} = \frac{\left\|\vec{F}_1-p_{\vec{F}_1-\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)\right\|}{\left\|p_{\vec{F}_1-\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)\right\|},\\
\tan\sphericalangle\left(\vec{F}_2-\vec{F}_1;\vec{F}_2\right) &= \frac{\left\|\vec{F}_2-\vec{F}_1-p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_2-\vec{F}_1\right)\right\|}{\left\|p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_2-\vec{F}_1\right)\right\|} = \frac{\left\|\vec{F}_1-p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)\right\|}{\left\|\vec{F}_2-p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)\right\|} = \frac{\left\|\vec{F}_2-p_{\vec{F}_2-\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)\right\|}{\left\|p_{\vec{F}_2-\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)\right\|}.
\end{aligned}$$

Damit sind alle Winkel in einem Parallelogramm bzw. Dreieck berechenbar. Soll der Tangens als Vektor definiert werden, so entspricht er dem Sinus.

Es kann auch das Gleichungssystems gelöst werden. Es ist $\left\|\vec{F}_i\right\|=F_i$.

$$\begin{matrix}
\vec{F}_1+p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_2\right)=p_{\vec{F}_1}\left(\vec{F}_{res}\right) \\
\vec{F}_2+p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_1\right)=p_{\vec{F}_2}\left(\vec{F}_{res}\right)
\end{matrix}
\Leftrightarrow
\begin{matrix}
F_1+F_2\cos\sphericalangle\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right)=F_{res}\cos\sphericalangle\left(\vec{F}_1,\vec{F}_{res}\right) \\
F_2+F_1\cos\sphericalangle\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right)=F_{res}\cos\sphericalangle\left(\vec{F}_2,\vec{F}_{res}\right)
\end{matrix}$$

Wir besitzen folglich zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

$$\begin{aligned}
F_1+F_2\cos\sphericalangle\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right) &= F_{res}\cos\sphericalangle\left(\vec{F}_1,\vec{F}_{res}\right)\\
F_2+F_1\cos\sphericalangle\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right) &= F_{res}\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right)-\sphericalangle\left(\vec{F}_1,\vec{F}_{res}\right)\right)
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
F_1+F_2\cos\sphericalangle\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right) &= F_{res}\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right)-\sphericalangle\left(\vec{F}_2,\vec{F}_{res}\right)\right)\\
F_2+F_1\cos\sphericalangle\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right) &= F_{res}\cos\sphericalangle\left(\vec{F}_2,\vec{F}_{res}\right)
\end{aligned}$$

Sind die Kräfte als Vektoren bekannt, so können die Winkel berechnet werden. Ist die linke Seite bekannt, so kann die rechte Seite bestimmt werden.

Sollen die Vektoren dargestellt werden, so darf einer der drei in der ersten Achse dargestellt werden. Damit liegen alle anderen über die Winkel fest.

Über Winkel im Dreieck und Parallelogramm

Sinussatz

$$\frac{\sin\sphericalangle(\vec{F}_1;\vec{F}_2)}{\|\vec{F}_2-\vec{F}_1\|}=\frac{\sin\sphericalangle(\vec{F}_2;\vec{F}_2-\vec{F}_1)}{\|\vec{F}_1\|}=\frac{\sin\sphericalangle(\vec{F}_1;\vec{F}_1-\vec{F}_2)}{\|\vec{F}_2\|},\ \sin\sphericalangle(\vec{F}_1;\vec{F}_2)=\frac{\|\vec{F}_1-p_{\vec{F}_2}(\vec{F}_1)\|}{\|\vec{F}_1\|}$$

Kosinussatz

$$F_{res}^2=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\sphericalangle(\vec{F}_1;\vec{F}_2),\ \cos\sphericalangle(\vec{F}_1;\vec{F}_2)=\frac{\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2}{\|\vec{F}_1\|\|\vec{F}_2\|}$$

Flächeninhalt Parallelogramm

$$\|\vec{F}_1\times\vec{F}_2\|=\|\vec{F}_1\|\|\vec{F}_2-p_{\vec{F}_1}(\vec{F}_2)\|=\|\vec{F}_2\|\|\vec{F}_1-p_{\vec{F}_2}(\vec{F}_1)\|$$

Tangens

$$\tan\sphericalangle(\vec{F}_1;\vec{F}_2)=\frac{\|\vec{F}_1-p_{\vec{F}_2}(\vec{F}_1)\|}{\|p_{\vec{F}_2}(\vec{F}_1)\|}=\frac{\|\vec{F}_2-p_{\vec{F}_1}(\vec{F}_2)\|}{\|p_{\vec{F}_1}(\vec{F}_2)\|},$$

$$\tan\sphericalangle(\vec{F}_1+\vec{F}_2;\vec{F}_1)=\frac{\|\vec{F}_2-p_{\vec{F}_1}(\vec{F}_2)\|}{\|\vec{F}_1+p_{\vec{F}_1}(\vec{F}_2)\|}=\frac{\|\vec{F}_1-p_{\vec{F}_1+\vec{F}_2}(\vec{F}_1)\|}{\|p_{\vec{F}_1+\vec{F}_2}(\vec{F}_1)\|},$$

$$\tan\sphericalangle(\vec{F}_1+\vec{F}_2;\vec{F}_2)=\frac{\|\vec{F}_1-p_{\vec{F}_2}(\vec{F}_1)\|}{\|p_{\vec{F}_2}(\vec{F}_1)+\vec{F}_2\|}=\frac{\|\vec{F}_2-p_{\vec{F}_1+\vec{F}_2}(\vec{F}_2)\|}{\|p_{\vec{F}_1+\vec{F}_2}(\vec{F}_2)\|}.$$

Konkretes Beispiel

Gegeben sind: $F_1=15\,\mathrm{N}$, $F_2=25\,\mathrm{N}$, $\sphericalangle(\vec{F}_1,\vec{F}_2)=110°$, $\sphericalangle(\vec{F}_1,\vec{F}_2)=\sphericalangle(\vec{F}_1,\vec{F}_{res})+\sphericalangle(\vec{F}_{res},\vec{F}_2)$

Gesucht sind: F_{res}, $\sphericalangle(\vec{F}_1,\vec{F}_{res})$ und $\sphericalangle(\vec{F}_{res},\vec{F}_2)$ sowie $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, wenn $\vec{F}_{res}$ in der ersten Achse dargestellt wird.

$$\begin{aligned} F_{res}^2&=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\sphericalangle(\vec{F}_1,\vec{F}_2) & \qquad & F_{res}^2=\left(15_1^2+25_2^2+750\cos(110°)\right)\mathrm{N}^2\\ F_2\sin\sphericalangle(\vec{F}_1,\vec{F}_2)&=F_{res}\sin\sphericalangle(\vec{F}_1,\vec{F}_{res}) & \Rightarrow & \sphericalangle(\vec{F}_1,\vec{F}_{res})=\sin^{-1}\frac{25\sin(110°)\mathrm{N}}{F_{res}}\\ F_1\sin\sphericalangle(\vec{F}_1,\vec{F}_2)&=F_{res}\sin\sphericalangle(\vec{F}_2,\vec{F}_{res}) & & \sphericalangle(\vec{F}_2,\vec{F}_{res})=\sin^{-1}\frac{15\sin(110°)\mathrm{N}}{F_{res}}\end{aligned}$$

Die Ergebnisse des ersten Teils sind

$F_{res}=24{,}36154536366173\ldots\mathrm{N}$, $\sphericalangle(\vec{F}_1,\vec{F}_{res})=74{,}64844490\ldots°$ und $\sphericalangle(\vec{F}_2,\vec{F}_{res})=35{,}35155511\ldots°$.

Mit $\vec{F}_{res}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$ sowie $\vec{F}_1=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})\mathrm{N}$ und $\vec{F}_2=(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})\mathrm{N}$ sowie $\vec{F}_{res}=(24{,}36\vec{i}+0\vec{j})\mathrm{N}$ folgt

$x_1+x_2=24{,}36$, $y_1+y_2=0$. Wir finden

$$y_1\,\mathrm{N}=F_1\sin\sphericalangle(\vec{F}_1,\vec{F}_{res})=14{,}46\,\mathrm{N}\ \text{ und }\ x_1\,\mathrm{N}=F_1\cos\sphericalangle(\vec{F}_1,\vec{F}_{res})=3{,}97\,\mathrm{N}.$$

Also $\vec{F}_1=(3{,}97\vec{i}+14{,}46\vec{j})\mathrm{N}$ und $\vec{F}_2=(20{,}39\vec{i}-14{,}46\vec{j})\mathrm{N}$.

Damit ist die Aufgabe vollständig gelöst.
Natürlich gibt es auch andere Wege zur Lösung.

Die Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor via Skalarprodukt[1, 2]

Projektionen gibt es reichlich. Bezeichnen wir die die Projektionen im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ mit π_i, wobei $\pi_1(x,y,z)=(0,y,z)$, $\pi_2(x,y,z)=(x,0,z)$ und $\pi_3(x,y,z)=(x,y,0)$, so gilt $\pi_i^2=\pi_i$. Nehmen wir dies zum Anlass und schreiben die Koordinaten mit Vektoren, also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\,.$$

Hier sind $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ die Einheitsvektoren in den Achsen. Die Projektionen bezeichnen wir nun mit $\pi_{\boldsymbol{i}}, \pi_{\boldsymbol{j}}, \pi_{\boldsymbol{k}}$. Also $\pi_{\boldsymbol{i}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) = y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\ \pi_{\boldsymbol{j}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) = x\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k},\ \pi_{\boldsymbol{k}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$.

Natürlich gilt auch hier die Projektionseigenschaft.

$$\begin{aligned}
\pi_{\boldsymbol{i}}^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) &= \pi_{\boldsymbol{i}}(y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) = y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\\
\pi_{\boldsymbol{j}}^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) &= \pi_{\boldsymbol{j}}(x\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}) = x\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k},\\
\pi_{\boldsymbol{k}}^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) &= \pi_{\boldsymbol{k}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}) = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.
\end{aligned}$$

Aber auch $\hat{\pi}_{\boldsymbol{i}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) = x\boldsymbol{i},\ \hat{\pi}_{\boldsymbol{j}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) = y\boldsymbol{j},\ \hat{\pi}_{\boldsymbol{k}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) = z\boldsymbol{k}$ sind als Projektionen möglich. Projiziert wird auf die Einheitsvektoren. Mittels kanonischen Skalarprodukts $\cdot$ wird es wie folgt geschrieben.

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_{\boldsymbol{i}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) &= \left[(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{i}\right]\boldsymbol{i}\\
\hat{\pi}_{\boldsymbol{j}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) &= \left[(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{j}\right]\boldsymbol{j}\\
\hat{\pi}_{\boldsymbol{k}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) &= \left[(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k}\right]\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

Natürlich können auch affine Unterräume verwendet werden. Es sei $[3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]$ das Erzeugnis des Unterraumes auf den projiziert wird, hier eine Ursprungsgerade. Es sei $[-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]$ die Projektionsrichtung. Dieser Unterraum wird auch durch $x+2y=0$ beschrieben. Ein beliebiger Vektor $u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}$ soll nun mittels der Projektion $[-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]$ auf den Unterraum $[3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}]$ projiziert werden. Es ist $s\cdot(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}) = (u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}) + t(-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$ im Unterraum $x+2y=0$ zu erfüllen, da wir natürlich die Zahl s suchen. Dies liefert $3s+2\cdot 1s = u+2v \Leftrightarrow s = \frac{u+2v}{5}$. Die Projektion kann beschrieben werden durch

$$p_{3i+j}^{-2i+j}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{u+2v}{5}(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

Hierbei handelt es sich um eine schräge Projektion. Eine Verallgemeinerung sollte machbar sein. Bleiben wir bei den orthogonalen Projektionen. Hier lassen wir uns von dem kanonischen Skalarprodukt leiten.

Bei der Betrachtung der Projektion eines Vektors $\vec{b}$ auf einen Vektor $\vec{a}$ via Skalarprodukt σ, in Zeichen $p_{\vec{a}}^{\sigma}(\vec{b})$, genügt es die durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugte Ebene zu betrachten, um die gewünschte Darstellung zu finden. Die Projektion soll orthogonal sein bzgl. σ.

---

1 Oeljeklaus, E.; Remmert R.: Lineare Algebra I. HT, Springer-Verlag, ISBN 3-540-06715-9, S. 98ff, S. 148

2 Holman, H.: Lineare und Multilineare Algebra. BI, Bd. 173/173a*, 1970, S. 148ff

$\vec{b} \perp \vec{a}$ impliziert $p_{\vec{a}}^{\sigma}(\vec{b}) = \vec{0}$. Folglich impliziert $\vec{b} - p_{\vec{a}}^{\sigma}(\vec{b}) \perp \vec{a}$ auch $p_{\vec{a}}^{\sigma}\left(p_{\vec{a}}^{\sigma}(\vec{b})\right) = p_{\vec{a}}^{\sigma}(\vec{b})$, da $0 = p_{\vec{a}}^{\sigma}\left(\vec{b} - p_{\vec{a}}^{\sigma}(\vec{b})\right) = p_{\vec{a}}^{\sigma}(\vec{b}) - p_{\vec{a}}^{\sigma}\left(p_{\vec{a}}^{\sigma}(\vec{b})\right)$. Wir definieren daher die Projektion durch

$$p_{\vec{a}}^{\sigma}(\vec{b}) := \sigma\left(\vec{b}, \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\right)\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \sigma(\vec{b}, \vec{a})\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}.$$

Begründung

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Es sei $[\vec{a}] := \{\vec{x} \mid \vec{x} = \lambda\vec{a}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ der von $\vec{a}$ erzeugte $\mathbb{R}$-Unterraum. Es sei $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$, $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \sigma(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ ein Skalarprodukt. Es sei

$$p_{\vec{a}}^{\sigma} : \begin{cases} V & \to & [\vec{a}] \\ \vec{b} & \mapsto & pr_{\vec{a}}(\vec{b}) \end{cases}, \qquad p_{\vec{a}}^{\sigma}(\vec{b}) := \sigma\left(\vec{b}, \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\right)\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \sigma(\vec{b}, \vec{a})\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}.$$

Für die σ-Projektion $p_{\vec{a}}^{\sigma}$, wobei $\vec{a} \neq \vec{0}$ ist, sind folgende Eigenschaften erfüllt.

1. $p_{\vec{a}}^{\sigma}(\vec{x} + \vec{y}) = p_{\vec{a}}^{\sigma}(\vec{x}) + p_{\vec{a}}^{\sigma}(\vec{y}),\ x, y \in V$ **2.** $p_{\vec{a}}^{\sigma}(\omega\vec{z}) = \omega p_{\vec{a}}^{\sigma}(\vec{z}),\ \omega \in \mathbb{R}$ **3.** $\left(p_{\vec{a}}^{\sigma}\right)^2 = p_{\vec{a}}^{\sigma}$

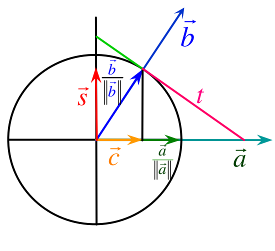
4. $V = \ker\left(p_{\vec{a}}^{\sigma}\right) \perp \operatorname{im}\left(p_{\vec{a}}^{\sigma}\right) = \ker\left(p_{\vec{a}}^{\sigma}\right) \perp [\vec{a}]$ **5.** $p_{\vec{a}}^{\sigma}(\vec{x}) = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in [\vec{a}]$

Beweis

Die Aussagen 1. und 2. sagen, dass es sich um eine lineare Abbildung handelt. Dies folgt sofort aus der Linearität im ersten Argument des Skalarproduktes. Aussage 3. ist die Bestätigung einer Projektion. Aussage 4. ist die orthogonale Zerlegung des Vektorraumes via Projektion erweitert durch ein Skalarprodukt.[3] Aussage 5. folgt mit $\sigma(\vec{a}, \vec{a}) = \|\vec{a}\|^2$ und $\vec{x} = \rho\vec{a}$ für $\rho \in \mathbb{R}$.

Der Kosinus eines Winkels zwischen zwei Vektoren

Für die Darstellung des Cosinus zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ betrachten wir den Einheitskreis, den wir in die Ebene legen, die durch $\vec{a}, \vec{b}$ erzeugt wird und identifizieren die erste Achse mit $\lambda \cdot \vec{a},\ \lambda \in \mathbb{R}$. Die senkrechte Projektion des normierten Vektors von $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$ heißt ***Richtungskosinus*** und wird mit $\vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$ bezeichnet.



$$\vec{s} := \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} - p_{\vec{a}}^{\sigma}\left(\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right)$$

$$\vec{c} := p_{\vec{a}}^{\sigma}\left(\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right)$$

$$\vec{s} + \vec{c} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Für $\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ entspricht somit die Länge des Vektors $\vec{c}(\vec{a}, \vec{b}) := p_{\vec{a}}\left(\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right)$ auf der 1. Achse bis auf das Vorzeichen dem $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, wobei $0 \leq \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$, also $\vec{c}(\vec{a}, \vec{b}) = p_{\vec{a}}\left(\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ und damit $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = p_{\vec{a}}\left(\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right) \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$. Beachte den Unterschied zwischen $\vec{c}(\vec{x}, \vec{v})$ und $p_{\vec{x}}(\vec{w})$. In $\vec{c}(\vec{x}, \vec{b})$ sind beide Vektoren normiert, $\vec{x}$ ist immer normiert, Jedoch muss $\vec{w}$ nicht normiert sein.

[3] Holmann, H.: Lineare und Multilineare Algebra. BI, Bd. 173/173a*, 1970, S. 152 Satz 5

Bemerkung

Wird der Kosinus des Winkels zwischen einem beliebigen normierten Vektor und einem Basisvektor einer orthonormierten Basis gemessen, so heißt das Produkt aus Kosinus und Basisvektor ***Richtungskosinus***. Ist $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ die Basis eines dreidimensionalen Raumes und ist $\boldsymbol{h} = h_i\boldsymbol{i} + h_j\boldsymbol{j} + h_k\boldsymbol{k}$ ein normierter Vektor, so sind $\vec{c}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{i}\cdot\left(h_i\boldsymbol{i} + h_j\boldsymbol{j} + h_k\boldsymbol{k}\right)\boldsymbol{i} = h_i\boldsymbol{i}$, $\vec{c}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{h}) = h_j\boldsymbol{j}$, $\vec{c}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{h}) = h_k\boldsymbol{k}$ und $\cos\sphericalangle(\boldsymbol{i},\boldsymbol{h}) = h_i$, $\cos\sphericalangle(\boldsymbol{j},\boldsymbol{h}) = h_j$, $\cos\sphericalangle(\boldsymbol{k},\boldsymbol{h}) = h_k$.

Damit ist die Bezeichnung Richtungskosinus gerechtfertigt, denn $\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$.

Entsprechend kann ein ***Richtungssinus*** definiert werden.

Es ist $\vec{s}\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} - p_{\vec{a}}^{\sigma}\left(\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right)$ und diese Länge entspricht dem Sinus $\left\|\vec{s}\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right\| = \sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Folglich sind

$$\vec{s}\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \sin\sphericalangle\left(\vec{a};\vec{b}\right)\frac{\vec{a} - p_{\vec{b}}(\vec{a})}{\left\|\vec{a} - p_{\vec{b}}(\vec{a})\right\|}, \qquad \vec{s}\left(\vec{b};\vec{a}\right) = \sin\sphericalangle\left(\vec{a};\vec{b}\right)\frac{\vec{b} - p_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)}{\left\|\vec{b} - p_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)\right\|}.$$

Aus $\vec{s} + \vec{c} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\cdot\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = (\vec{s} + \vec{c})\cdot(\vec{s} + \vec{c}) = \vec{s}\cdot\vec{s} + \vec{c}\cdot\vec{c} \\ &= \|\vec{s}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 = s^2 + c^2 \\ &= \sin^2\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) + \cos^2\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) \end{aligned}$$

Ferner $\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}\right)\right)$.

Vgl. auch $\sin^2\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) + \cos^2\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 1$, da hier $0 \le \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) \le \pi$.

In der Physik wird gerne für den Ortsvektor $\vec{r}_0 := \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{\|\vec{\boldsymbol{r}}\|}$ und für die Einheitsvektoren - entstanden aus dem Körper der Quaternionen - $\vec{k}$, $\vec{j}$ und $\vec{i}$ gesetzt. Mit $\vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_{\vec{i}}\cdot\vec{i} + \boldsymbol{r}_{\vec{j}}\cdot\vec{j} + \boldsymbol{r}_{\vec{k}}\cdot\vec{k}$ erhalten wir nun drei Richtungskosinus

$$\begin{aligned} \vec{c}_{\vec{i}} &= p_{\vec{i}}\left(\vec{r}_0\right) = \left(\vec{r}_0\cdot\vec{i}\right)\vec{i} = \frac{\boldsymbol{r}_{\vec{i}}}{\|\vec{\boldsymbol{r}}\|}\vec{i} = \cos\sphericalangle\left(\vec{i},\vec{\boldsymbol{r}}\right)\vec{i} \\ \vec{c}_{\vec{j}} &= p_{\vec{j}}\left(\vec{r}_0\right) = \left(\vec{r}_0\cdot\vec{j}\right)\vec{j} = \frac{\boldsymbol{r}_{\vec{j}}}{\|\vec{\boldsymbol{r}}\|}\vec{j} = \cos\sphericalangle\left(\vec{j},\vec{\boldsymbol{r}}\right)\vec{j} \\ \vec{c}_{\vec{k}} &= p_{\vec{k}}\left(\vec{r}_0\right) = \left(\vec{r}_0\cdot\vec{k}\right)\vec{k} = \frac{\boldsymbol{r}_{\vec{k}}}{\|\vec{\boldsymbol{r}}\|}\vec{k} = \cos\sphericalangle\left(\vec{k},\vec{\boldsymbol{r}}\right)\vec{k} \end{aligned}$$

mit

$$\vec{c}_{\vec{i}} + \vec{c}_{\vec{j}} + \vec{c}_{\vec{k}} = \frac{\boldsymbol{r}_{\vec{i}}}{\|\vec{\boldsymbol{r}}\|}\vec{i} + \frac{\boldsymbol{r}_{\vec{j}}}{\|\vec{\boldsymbol{r}}\|}\vec{j} + \frac{\boldsymbol{r}_{\vec{k}}}{\|\vec{\boldsymbol{r}}\|}\vec{k} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{\|\vec{\boldsymbol{r}}\|} = \vec{r}_0$$

und

$$\left\|\vec{c}_{\vec{i}}\right\|^2 + \left\|\vec{c}_{\vec{j}}\right\|^2 + \left\|\vec{c}_{\vec{k}}\right\|^2 = 1$$

sowie

$$\left\|\vec{c}_{\vec{i}} + \vec{c}_{\vec{j}} + \vec{c}_{\vec{k}}\right\| = \|\vec{r}_0\| = 1\,.$$

Für den Sinus gilt in diesem Fall

$$\vec{s} = \vec{r}_0 - p_{\vec{i}}\left(\vec{r}_0\right) = \vec{r}_0 - \left(\vec{r}_0 \cdot \vec{i}\right)\vec{i} = \frac{r_{\vec{j}}}{\|\vec{r}\|}\vec{j} + \frac{r_{\vec{k}}}{\|\vec{r}\|}\vec{k}\,.$$

Ohne Richtung, also Einheitsvektor, ist ein Richtungskosinus sinnlos! Es scheint ein fataler Fehler vorzuliegen, da die Quaternionen $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ nach Umstellung auf Vektoren einfach weggelassen wurden.

Wer ein wenig mehr über Projektionen wissen möchte, hier ein wichtiger Satz.

Es sei M ein R - Modul.

Satz[4]

Folgende Aussagen über einen Endomorphismus $\varphi : M \to M$ sind äquivalent.

i) $\varphi^2 = \varphi$

ii) $\operatorname{Fix}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$

iii) $M = \operatorname{Fix}\varphi \oplus \operatorname{Ker}\varphi$

Alsdann ist φ die Projektion auf $\operatorname{Fix}\varphi$ längs $\operatorname{Ker}\varphi$.

Beweis

i) $\Rightarrow$ ii) Es ist $\operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{Fix}\varphi$ zu zeigen.

Sei $x \in \operatorname{Im}\varphi$ und $\varphi(y) = x$ für ein $y \in M$. Dann ist $\varphi(x) = \varphi^2(y) = \varphi(y) = x$, also $x \in \operatorname{Fix}\varphi$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sei $x \in \operatorname{Im}(id - \varphi)$ mit $x = (id - \varphi)(y)$ für ein $y \in M$. Dann ist $\varphi(x) = \varphi(y) - \varphi^2(y) = 0$, da $\varphi(y) \in \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Fix}\varphi$. Folglich ist $\operatorname{Im}(id - \varphi) \subset \operatorname{Ker}\varphi$. Damit ist

$$M = \operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Im}(id - \varphi) = \operatorname{Fix}\varphi + \operatorname{Ker}\varphi\,.$$

Wegen $\operatorname{Fix}\varphi \cap \operatorname{Ker}\varphi = 0$ ist die Summe direkt.

iii) $\Rightarrow$ i) Für jedes $x = u + v$ mit $u \in \operatorname{Fix}\varphi, v \in \operatorname{Ker}\varphi$ gilt $\varphi(x) = \varphi(u) = u$. Also ist φ die Projektion auf $\operatorname{Fix}\varphi$ längs $\operatorname{Ker}\varphi$. Mithin gilt $\varphi^2(x) = \varphi(u) = u = \varphi(x)$, also $\varphi^2 = \varphi$.

Bemerkung

Aus $\varphi^2 = \varphi$ folgt $(id - \varphi)^2 = id - \varphi$ und umgekehrt.

Ist also $\varphi : M \to M$ die Projektion auf $\operatorname{Fix}\varphi$ längs $\operatorname{Ker}\varphi$, so ist $id - \varphi : M \to M$ die Projektion auf $\operatorname{Fix}(id - \varphi) = \operatorname{Ker}\varphi$ längs $\operatorname{Ker}(id - \varphi) = \operatorname{Fix}\varphi$ und umgekehrt.

[4] *Oeljeklaus, E.; Remmert R.: Lineare Algebra I. HT, Springer-Verlag, ISBN 3-540-06715-9, Satz 6, Seite 99*