DER STERN-OPERATOR VON HODGE

Alle $\mathbb{K}$-Vektorräume sind endlichdimensional. Die Charakteristik des Körpers sei ungleich 2, also $1+1\neq 0$.

In der Theorie der alternierenden Differentialformen wird kein Skalarprodukt benötigt. In der Differentialgeometrie hingegen schon. Natürlich kann ein kanonisches Skalarprodukt $\mathfrak{s}:V\times V\to\mathbb{R}$ (positiv definite symmetrische Bilinearform) immer definiert werden. Dieses definiert dann auch eine kanonische riemannsche Metrik g. Statt des Skalarproduktes betrachten wir auch hermitesche Sesquilinearformen $\mathfrak{h}:V\times V\to\mathbb{C}$ auf komplexen Vektorräumen und natürlich auch indefinite Formen. Wir setzen das gram-schmidtsche Verfahren zur Erstellung einer Orthonormalbasis $\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\dots,\boldsymbol{t}_n\in V$ voraus. Durch die Volumenform $\mu_g:\bigwedge^n V\cong\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ wird eine innere Orientierung $\mu_g\left(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\dots,\boldsymbol{t}_n\right)=1$ (positiv orientiert) und $\mu_g\left(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\dots,\boldsymbol{t}_n\right)=-1$ (negativ orientiert) definiert. Diese Volumenform soll nun so zerlegt werden, dass gewisse Eigenschaften invariant sind und besonders in den Anwendungen zum Tragen kommen. Die Orthonormalität soll wenigstens orthogonal auf gewisse Unterräume von $\bigwedge^p V$ fortgesetzt werden. Schauen wir uns ein einfaches Beispiel an. Setzen wir nur einige der orthogonalen Vektoren ein, so bestimmt diese Form eindeutig ein Volumen in den Projektionen. Als einfaches Beispiel diene ein Parallelepiped[1] im $\mathbb{R}^3$, hier ein einfacher Würfel. Die Volumina sind über die alternierenden 2-Formen $\iota_{\boldsymbol{t}_1}\mu_g$, $\iota_{\boldsymbol{t}_2}\mu_g$ und $\iota_{\boldsymbol{t}_3}\mu_g$ mit $\iota_{\boldsymbol{t}_i}\mu_g=\mu_g\left(\boldsymbol{t}_i,\cdot,\cdot\right)$ eindeutig positiv definiert, wenn $\mu_g\left(\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\right)=1$. Die ergänzende Form zu $\iota_{\boldsymbol{t}_2}\mu_g=-\mu_g\left(\cdot,\boldsymbol{t}_2,\cdot\right)=\lambda^3\wedge\lambda^1$ ist $\iota_{\boldsymbol{t}_1}\left(\iota_{\boldsymbol{t}_3}\mu_g\right)=\mu_g\left(\boldsymbol{t}_1,\cdot,\boldsymbol{t}_3\right)=\lambda^2$, da $\mu_g=-\mu_g\left(\cdot,\boldsymbol{t}_2,\cdot\right)\wedge\mu_g\left(\boldsymbol{t}_1,\cdot,\boldsymbol{t}_3\right)$ mit $\mu_g=\lambda^1\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3$ gilt. Im Allgemeinen ist jedoch nicht $\mu_g\left(\cdot,\boldsymbol{t}_2,\cdot\right)\wedge\mu_g\left(\boldsymbol{t}_1,\cdot,\boldsymbol{t}_3\right)=\mu_g\left(\boldsymbol{t}_1,\cdot,\boldsymbol{t}_3\right)\wedge\mu_g\left(\cdot,\boldsymbol{t}_2,\cdot\right)$.

Eine solche Zerlegung wird durch den Stern-Operator $*$ vorgenommen, die zur Hodge-Zerlegung führen. Auf Differentialformen $\alpha,\beta\in\bigwedge^p V$, $\omega\in\bigwedge^{p-1}V$ gilt dann für die verallgemeinerten Metriken $G_{n-p}\left(*\alpha,*\beta\right)=G_p\left(\alpha,\beta\right)$ und $\left[d\omega,\alpha\right]_p=\left[\omega,\delta\alpha\right]_{p-1}$ mit dem Differential d und Codifferential δ, die somit „adjungiert" sind. In Hilberträumen, nicht der Folgenraum, wird ein Skalarprodukt immer durch ein Integral definiert. Darauf gehe ich hier nicht ein. Ist der Raum riemannsch (lokal euklidisch), so gilt immer $\upsilon\wedge*\upsilon=\mu_g$, wenn υ durch μ_g als Volumen im Unterraum generiert wurde, indem entsprechende Linearformen in μ_g, wie oben angedeutet, ausgelassen wurden.

Einige Wiederholungen kann der geneigte Anfänger im Anhang nachlesen. Soweit es möglich ist, wird alles koordinatenfrei formuliert. Eine sehr ausführliche Darstellung findet der Leser in Lamprecht.[2] Beispiele zu Differentialformen ab Seite 194. Der Anfänger sollte sich immer ein Buch hernehmen, in dem koordinatenfrei in den unendlichdimensionalen Banachräumen gearbeitet wird, um sich dann die koordinatenabhängigen Darstellungen anzuschauen.

---

1 *http://www.dr-gert-hillebrandt.de/pdf/schule/Mathematik%20Schule/Oberstufe/ allgemeine_volumenberechnung_und_orientierungen.pdf*

2 *Lamprecht, E.: Lineare Algebra 2, UTB Birkhäuser, ISBN 3-7643-1482-6*

Definition des Hodge-Stern-Operators

Es sei $\mathcal{O}_g = \{\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_n\}$ eine geordnete orientierte Orthonormalbasis von V bzgl. des Skalarprodukts g. Es sei $\mathcal{O}_g^* = \{\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n\}$, mit $\lambda^i := \iota_{\boldsymbol{t}_i} g$ für alle $i \in \mathbb{N},\ i \leq n$ die zu $\mathcal{O}_g := \{\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_n\}$ eindeutig bestimmte duale Basis der Linearformen. Es gilt folglich $\lambda^i(\boldsymbol{t}_j) = 0,\ i \neq j$ und $\lambda^i(\boldsymbol{t}_j) = \pm 1,\ i = j$.

Weiter sei $\bigwedge^k(V)$ der k-te Graßmann-Raum, der $\mathbb{K}$-Vektorraum der alternierenden k-Linearformen. Es gilt

$$\dim_{\mathbf{K}}\left(\bigwedge^k(V)\right) = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \dim_{\mathbf{K}}\left(\bigwedge^{n-k}(V)\right).$$

Es existiert ein Isomorphismus

$$*: \begin{cases} \bigwedge^k(V) \to \bigwedge^{n-k}(V) \\ \quad \alpha \quad \mapsto \quad *\alpha \end{cases} \quad \text{definiert durch} \quad \begin{array}{c} (*\alpha)\left(\boldsymbol{t}_{i_{k+1}}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_n}\right) := \alpha\left(\boldsymbol{t}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_k}\right), \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_k,\ i_{k+1} < \cdots < i_n. \end{array}$$

Ferner gilt

$$*(*\alpha)) = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(g) \cdot \alpha$$

oder kurz $$** = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(g) \Leftrightarrow *^{-1} = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(g) *,$$

wobei sgn für die Signatur der pseudoriemannschen Metrik g steht.

Da $(*\alpha)\left(\boldsymbol{t}_{i_{k+1}}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_n}\right) = \alpha\left(\boldsymbol{t}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_k}\right) = f \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{K})$, wird die Auswertung des Stern-Operators $*$ auf den Basiselementen vorgenommen. Via lineare Fortsetzung sind sie dann auf den alternierenden k-Linearformen definiert.

Der Raum der alternierenden *n*-Linearformen ist eindimensional. Es sei $\mu_g \in \bigwedge^n(V)$ die eindeutig bestimmte normierte Volumenform auf V^n, also $\mu_g(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_n) = 1$. Beachten Sie auch, dass nur dann $\mu_g(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_n) = 1$ ist, wenn die Signatur $\operatorname{sgn}(g)$ als Faktor in μ_g vorkommt. Es sei folglich $\upsilon_g := \operatorname{sgn}(g)\mu_g$ definiert. υ_g heißt auch ***entartetes*** Volumenelement. Sie entspringt der Minkowski-Metrik (Quaternionen).

Wir ***definieren auf den geordneten Monomen*** für alle $0 \leq k < n$

$$\begin{gathered} *\left(\lambda^{i_{k+1}} \wedge \lambda^{i_{k+2}} \wedge \cdots \wedge \lambda^{i_n}\right) := \upsilon_g\left(\boldsymbol{t}_{i_{k+1}}, \boldsymbol{t}_{i_{k+2}}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_n}, \cdot, \cdot, \ldots, \cdot\right) \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_k,\ i_{k+1} < \cdots < i_n \\ i_j \in \{1, \ldots, n\} \end{gathered}$$

und setzen

$$s^{i_1 \cdots i_k} \cdot \lambda^{i_1} \wedge \lambda^{i_2} \wedge \cdots \wedge \lambda^{i_k} := \upsilon_g\left(\boldsymbol{t}_{i_{k+1}}, \boldsymbol{t}_{i_{k+2}}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_n}, \cdot, \cdot, \ldots, \cdot\right).$$

Die Zahl $s^{i_1\cdots i_k} \in \{-1,+1\}$ wird durch Auswertung auf den restlichen Basisvektoren vorgenommen. Es folgt

$$s^{i_1\cdots i_k} \cdot \iota_{\boldsymbol{t}_{i_1}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_1}\right) \cdot \iota_{\boldsymbol{t}_{i_2}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_2}\right) \cdots \iota_{\boldsymbol{t}_{i_k}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_k}\right) = \upsilon_g\left(\boldsymbol{t}_{i_{k+1}}, \boldsymbol{t}_{i_{k+2}}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_n}, \boldsymbol{t}_{i_1}, \boldsymbol{t}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_k}\right),$$

und wegen $\lambda^{i_j}\left(\boldsymbol{t}_{i_j}\right) = \iota_{\boldsymbol{t}_{i_j}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_j}\right) = \pm 1$ also

$$s^{i_1\cdots i_k} = \iota_{\boldsymbol{t}_{i_1}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_1}\right) \cdot \iota_{\boldsymbol{t}_{i_2}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_2}\right) \cdots \iota_{\boldsymbol{t}_{i_k}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_k}\right) \cdot \upsilon_g\left(\boldsymbol{t}_{i_{k+1}}, \boldsymbol{t}_{i_{k+2}}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_n}, \boldsymbol{t}_{i_1}, \boldsymbol{t}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_k}\right).$$

Nun erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left(\left(\lambda^{i_{k+1}} \wedge \lambda^{i_{k+2}} \wedge \cdots \wedge \lambda^{i_n}\right)\right) &= s^{i_1\cdots i_k} \cdot \left(*\left(\lambda^{i_1} \wedge \lambda^{i_2} \wedge \cdots \wedge \lambda^{i_k}\right)\right) \\
&= s^{i_1\cdots i_k} \cdot \left(s^{i_{k+1}\cdots i_n} \cdot \lambda^{i_{k+1}} \wedge \lambda^{i_{k+2}} \wedge \cdots \wedge \lambda^{i_n}\right) \\
&= \left(s^{i_1\cdots i_k} \cdot s^{i_{k+1}\cdots i_n}\right) \cdot \lambda^{i_{k+1}} \wedge \lambda^{i_{k+2}} \wedge \cdots \wedge \lambda^{i_n}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
s^{i_1\cdots i_k} \cdot s^{i_{k+1}\cdots i_n} &= \operatorname{sgn}(g) \cdot \left[\upsilon_g\left(\boldsymbol{t}_{i_{k+1}}, \boldsymbol{t}_{i_{k+2}}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_{k+n-k}}, \boldsymbol{t}_{i_1}, \boldsymbol{t}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_k}\right)\right] \cdot \left[\upsilon_g\left(\boldsymbol{t}_{i_1}, \boldsymbol{t}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_k}, \boldsymbol{t}_{i_{k+1}}, \boldsymbol{t}_{i_{k+2}}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_n}\right)\right] \\
&= \operatorname{sgn}(g) \cdot (-1)^{k(n-k)} \left(\upsilon_g\left(\boldsymbol{t}_{i_1}, \boldsymbol{t}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_k}, \boldsymbol{t}_{i_{k+1}}, \boldsymbol{t}_{i_{k+2}}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_n}\right)\right)^2 \\
&= \operatorname{sgn}(g) \cdot (-1)^{k(n-k)},
\end{aligned}$$

ist damit $** = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(g)$ bewiesen.

Bemerkung

Auch andere Definitionen sind möglich, wenn statt der entarteten direkt die Volumenform in der obigen Definition eingesetzt wird. Das hängt damit zusammen, wohin die Reise geht. Die 0- und *n*-Formen sind zu beachten und ggf. neu zu definieren.

An der Definition erkennen wir noch zwei verschiedene Möglichkeiten. Z.B.

$$s^{i_{k+1}\cdots i_n} = \iota_{\boldsymbol{t}_{i_{k+1}}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_{k+1}}\right) \cdot \iota_{\boldsymbol{t}_{i_{k+2}}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_{k+2}}\right) \cdots \iota_{\boldsymbol{t}_{i_n}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_n}\right) \cdot \upsilon_g\left(\boldsymbol{t}_{i_1}, \boldsymbol{t}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_k}, \boldsymbol{t}_{i_{k+1}}, \boldsymbol{t}_{i_{k+2}}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_n}\right)$$

Die Formel $** = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(g)$ bleibt bestehen.

An einigen Beispielen zeigen wir nun die Natürlichkeit der Volumenform μ_g bzw. υ_g auf, die sofort ausgewertet werden kann. Der allgemeine Fall mit Formel, dass keine Orthonormalbasis vorliegt, kann durch eine Basistransformation gezeigt werden. Ist β ein Basiselement der Zerlegung, so gilt im riemannschen Fall immer $\beta \wedge *\beta = \mu_g$. Im riemannschen bzw. euklidischen Fall ist stets $\operatorname{sgn}(g) = 1$.

Die Formel $** = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(g)$ verifiziere bitte jeder selbst.

Beispiele

1. Es seien $n=2$ und e_1,e_2 die orthonormalen Basiselemente des euklidischen Raumes. d.h. $\iota_{e_i} g\left(e_j\right)=0,\ i\neq j$, $\operatorname{sgn}(g)=1$ und $\mu_g\left(e_1,e_2\right)=1$. Dann sind

$$*1=\mu_g=\lambda^1\wedge\lambda^2, \qquad *\left(\lambda^1\wedge\lambda^2\right)=\mu_g\left(e_1,e_2\right)=1$$

$$*\lambda^1=\mu_g\left(e_1,\cdot\right)=\lambda^2, \qquad *\lambda^2=\mu_g\left(e_2,\cdot\right)=-\mu_g\left(\cdot,e_2\right)=-\lambda^1.$$

Ferner sind $**=(-1)^{k\cdot(n-k)}$ und $\beta\wedge*\beta=\mu_g$ erfüllt.

$$\lambda^1\wedge*\lambda^1=\lambda^1\wedge\lambda^2=\mu_g \text{ und } \lambda^2\wedge*\lambda^2=\lambda^2\wedge\left(-\lambda^1\right)=\mu_g$$

2. Es seien $n=2$ und $e_1,e_2=\ell$ die orthonormalen Basiselemente des indefiniten Skalarprodukts $\iota_{e_i} g\left(e_j\right)=0,\ i\neq j$, $\iota_{e_1} g\left(e_1\right)=1$ und $\iota_\ell g(\ell)=-1$ mit normierter Volumenform $\mu_g=\operatorname{sgn}(g)\upsilon_g$. Wegen $\mu_g\left(e_1,\cdot\right)=\operatorname{sgn}(g)\tau$ und $\mu_g\left(\cdot,e_2\right)=\lambda$ liegt ein ***Raum vom Typ*** $(-,+):=\left(\operatorname{sgn}(g),\operatorname{sgn}(g)^2\right)$ vor. Wir erhalten

$$*1=\upsilon_g=\lambda\wedge\tau, \qquad *(\lambda\wedge\tau)=\upsilon_g\left(e_1,e_2\right)\cdot 1=\operatorname{sgn}(g)\cdot 1=-1,$$

$$*\lambda=\upsilon_g\left(e_1,\cdot\right)=\tau, \qquad *\tau=\upsilon_g\left(e_2,\cdot\right)=-\upsilon_g\left(\cdot,e_2\right)=\lambda.$$

Ferner ist $**=(-1)^{k\cdot(n-k)}\operatorname{sgn}(g)$ erfüllt.

$$\lambda\wedge*\lambda=\lambda\wedge(\tau)=\upsilon_g \text{ und } \tau\wedge*\tau=\tau\wedge(\lambda)=-\upsilon_g.$$

3. Es seien $n=3$ und e_1,e_2,e_3 die orthonormalen Basiselemente bzgl. des gewöhnlichen Skalarprodukts, d.h. $\iota_{e_i} g\left(e_j\right)=0,\ i\neq j$, $\iota_{e_1} g\left(e_1\right)=\iota_{e_2} g\left(e_2\right)=\iota_{e_3} g\left(e_3\right)=1$.

Mit $\upsilon_g=\mu_g$ sind

$$*1=\mu_g=\lambda^1\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3 \text{ und } *\mu_g=1,$$

$$*\lambda^1=\mu_g\left(e_1,\cdot,\cdot\right)=\lambda^2\wedge\lambda^3, \qquad *\lambda^2=\mu_g\left(e_2,\cdot,\cdot\right)=-\mu_g\left(\cdot,e_2,\cdot\right)=-\lambda^1\wedge\lambda^3,$$

$$*\lambda^3=\mu_g\left(e_3,\cdot,\cdot\right)=\mu_g\left(\cdot,\cdot,e_3\right)=\lambda^1\wedge\lambda^2$$

$$*\left(\lambda^1\wedge\lambda^2\right)=\mu_g\left(e_1,e_2,\cdot\right)=\lambda^3$$

$$*\left(\lambda^2\wedge\lambda^3\right)=\mu_g\left(e_2,e_3,\cdot\right)=\mu_g\left(\cdot,e_2,e_3\right)=\lambda^1$$

$$*\left(\lambda^1\wedge\lambda^3\right)=\mu_g\left(e_1,e_3,\cdot\right)=-\mu_g\left(e_1,\cdot,e_3\right)=-\lambda^2,$$

Natürlich stimmt $**=(-1)^{k(n-k)}=1$.

$$\lambda^1\wedge*\lambda^1=\lambda^1\wedge\left(\lambda^2\wedge\lambda^3\right)=\mu_g,\ \lambda^2\wedge*\lambda^2=\lambda_2\wedge\left(-\lambda^1\wedge\lambda^3\right)=\mu_g \text{ und } \lambda^3\wedge*\lambda^3=\lambda^3\wedge\left(\lambda^1\wedge\lambda^2\right)=\mu_g$$

4. Es sei $n=3$ und $e_1,e_2,e_3=\ell$ die orthonormalen Basiselemente bzgl. des indefiniten Skalarprodukts g mit $\iota_{e_i} g(e_j)=0,\ i\neq j,\ \iota_{e_1} g(e_1)=\iota_{e_2} g(e_2)=1,\ \iota_\ell g(\ell)=\operatorname{sgn}(g)=-1.$

Es ist ein ***Raum vom Typ*** $(-,-,+)$. Wir erhalten mit $\upsilon_g=\lambda^1\wedge\lambda^2\wedge\tau$

0-*Dualform* 4-*Dualform*

$$*1=\upsilon_g=\lambda^1\wedge\lambda^2\wedge\tau, \qquad *\upsilon_g=\upsilon_g(e_1,e_2,\ell)=-1$$

1-*Dualformen*

$$\begin{aligned}
*\lambda^1 &= \upsilon_g(e_1,\cdot,\cdot)=\iota_{e_1} g(e_1)\lambda^2\wedge\tau=\lambda^2\wedge\tau,\\
*\lambda^2 &= \upsilon_g(e_2,\cdot,\cdot)=-\upsilon_g(\cdot,e_2,\cdot)=-\lambda^1\wedge\tau,\\
*\tau &= \upsilon_g(\ell,\cdot,\cdot)=\upsilon_g(\cdot,\cdot,\ell)=\operatorname{sgn}(g)\lambda^1\wedge\lambda^2.
\end{aligned}$$

2-*Dualformen*

$$\begin{aligned}
*(\lambda^1\wedge\lambda^2) &= \upsilon_g(e_1,e_2,\cdot)=\tau,\\
*(\lambda^1\wedge\tau) &= \upsilon_g(e_1,\ell,\cdot)=-\upsilon_g(e_1,\cdot,\ell)=-\operatorname{sgn}(g)\lambda^2=\lambda^2,\\
*(\lambda^2\wedge\tau) &= \upsilon_g(e_2,\ell,\cdot)=\upsilon_g(\cdot,e_2,\ell)=\operatorname{sgn}(g)\lambda^1=-\lambda^1.
\end{aligned}$$

$$1\cdot(*1)=1\cdot\upsilon_g=\upsilon_g,\quad \upsilon_g\wedge*\upsilon_g=\upsilon_g\cdot(-1)=-\upsilon_g,$$

$$\lambda^1\wedge*\lambda^1=\lambda^1\wedge\lambda^2\wedge\tau=\upsilon_g,\ \lambda^2\wedge*\lambda^2=\lambda^2\wedge-\lambda^1\wedge\tau=\upsilon_g,\ \tau\wedge*\tau=\tau\wedge\operatorname{sgn}(g)\lambda^1\wedge\lambda^2=-\upsilon_g,$$

$$\lambda^1\wedge\lambda^2\wedge*(\lambda^1\wedge\lambda^2)=\lambda^1\wedge\lambda^2\wedge\tau=\upsilon_g,\ \lambda^1\wedge\tau\wedge*(\lambda^1\wedge\tau)=\lambda^1\wedge\tau\wedge\lambda^2=-\upsilon_g,$$

$$\lambda^2\wedge\tau\wedge*(\lambda^2\wedge\tau)=\lambda^2\wedge\tau\wedge-\lambda^1=-\upsilon_g.$$

5. Es seien $n=4$ und $e_1=\ell,e_2,e_3,e_4$ die orthonormalen Basiselemente bzgl. des indefiniten Skalarprodukts nach Lorentz ($\tau:=ct$, wobei ct das Produkt aus Lichtgeschwindigkeit und Zeit ist). Es ist ein ***Raum vom Typ*** $(+,-,-,-)$. Mit

$$\iota_{e_i} g(e_j)=0,\ i\neq j,\ \iota_\ell g(\ell)=-1,\ \iota_{e_2} g(e_2)=\iota_{e_3} g(e_3)=\iota_{e_4} g(e_4)=1$$

erhalten wir

0-*Dualform* 4-*Dualform*

$$*1=\upsilon_g=\tau\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3\wedge\lambda^4, \qquad *\upsilon_g=\upsilon_g(\ell,e_2,e_3,e_4)=-1$$

1-*Dualformen*

$$\begin{aligned}
*\tau &= \upsilon_g(\ell,\cdot,\cdot,\cdot)=\operatorname{sgn}(g)\lambda^2\wedge\lambda^3\wedge\lambda^4=-\lambda^2\wedge\lambda^3\wedge\lambda^4,\\
*\lambda^2 &= \upsilon_g(e_2,\cdot,\cdot,\cdot)=-\upsilon_g(\cdot,e_2,\cdot,\cdot)=-\tau\wedge\lambda^3\wedge\lambda^4,\\
*\lambda^3 &= \upsilon_g(e_3,\cdot,\cdot,\cdot)=\upsilon_g(\cdot,\cdot,e_3,\cdot)=\tau\wedge\lambda^2\wedge\lambda^4,\\
*\lambda^4 &= \upsilon_g(e_4,\cdot,\cdot,\cdot)=-\upsilon_g(\cdot,\cdot,\cdot,e_4)=-\tau\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3.
\end{aligned}$$

2-Dualformen

$$\begin{aligned}
*\left(\tau\wedge\lambda^2\right)&=\upsilon_g\left(\ell,e_2,\cdot,\cdot\right)=\operatorname{sgn}(g)\lambda^3\wedge\lambda^4,\\
*\left(\tau\wedge\lambda^3\right)&=\upsilon_g\left(\ell,e_3,\cdot,\cdot\right)=-\upsilon_g\left(\ell,\cdot,e_3,\cdot\right)=-\operatorname{sgn}(g)\lambda^2\wedge\lambda^4,\\
*\left(\tau\wedge\lambda^4\right)&=\upsilon_g\left(\ell,e_4,\cdot,\cdot\right)=\upsilon_g\left(\ell,\cdot,\cdot,e_4\right)=\operatorname{sgn}(g)\lambda^2\wedge\lambda^3,\\
*\left(\lambda^2\wedge\lambda^3\right)&=\upsilon_g\left(e_2,e_3,\cdot,\cdot\right)=\upsilon_g\left(\cdot,e_2,e_3,\cdot\right)=\tau\wedge\lambda^4,\\
*\left(\lambda^2\wedge\lambda^4\right)&=\upsilon_g\left(e_2,e_4,\cdot,\cdot\right)=-\upsilon_g\left(\cdot,e_2,\cdot,e_4\right)=-\tau\wedge\lambda^3,\\
*\left(\lambda^3\wedge\lambda^4\right)&=\upsilon_g\left(e_3,e_4,\cdot,\cdot\right)=\upsilon_g\left(\cdot,\cdot,e_3,e_4\right)=\tau\wedge\lambda^2.
\end{aligned}$$

3-Dualformen

$$\begin{aligned}
*\left(\lambda^2\wedge\lambda^3\wedge\lambda^4\right)&=\upsilon_g\left(e_2,e_3,e_4,\cdot\right)=-\upsilon_g\left(\cdot,e_2,e_3,e_4\right)=-\tau,\\
*\left(\tau\wedge\lambda^3\wedge\lambda^4\right)&=\upsilon_g\left(\ell,e_3,e_4,\cdot\right)=\upsilon_g\left(\ell,\cdot,e_3,e_4\right)=\operatorname{sgn}(g)\lambda^2=-\lambda^2,\\
*\left(\tau\wedge\lambda^2\wedge\lambda^4\right)&=\upsilon_g\left(\ell,e_2,e_4,\cdot\right)=-\upsilon_g\left(\ell,e_2,\cdot,e_4\right)=-\operatorname{sgn}(g)\lambda^3=\lambda^3,\\
*\left(\tau\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3\right)&=\upsilon_g\left(\ell,e_2,e_3,\cdot\right)=\operatorname{sgn}(g)\lambda^4=-\lambda^4.
\end{aligned}$$

Auch $**=(-1)^{k(n-k)}\operatorname{sgn}(g)$ ist selbstverständlich erfüllt.

Berechnen wir noch die Produkte $\beta\wedge*\beta=\xi\upsilon_g$

$\tau\wedge*\tau=\tau\wedge\left(-\lambda^2\wedge\lambda^3\wedge\lambda^4\right)=-\upsilon_g$, $\lambda^2\wedge*\lambda^2=\lambda^2\wedge\left(-\tau\wedge\lambda^3\wedge\lambda^4\right)=\upsilon_g$,

$\lambda^3\wedge*\lambda^3=\lambda^3\wedge\left(\tau\wedge\lambda^2\wedge\lambda^4\right)=\upsilon_g$, $\lambda^4\wedge*\lambda^4=\lambda^4\wedge\left(-\tau\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3\right)=\upsilon_g$,

$\tau\wedge\lambda^2\wedge*\left(\tau\wedge\lambda^2\right)=\tau\wedge\lambda^2\wedge\left(-\lambda^3\wedge\lambda^4\right)=-\upsilon_g$, $\lambda^3\wedge\lambda^4\wedge*\left(\lambda^3\wedge\lambda^4\right)=\lambda^3\wedge\lambda^4\wedge\left(\tau\wedge\lambda^2\right)=\upsilon_g$,

$\tau\wedge\lambda^3\wedge*\left(\tau\wedge\lambda^3\right)=\tau\wedge\lambda^3\wedge\left(\lambda^2\wedge\lambda^4\right)=-\upsilon_g$, $\lambda^2\wedge\lambda^4\wedge*\left(\lambda^2\wedge\lambda^4\right)=\lambda^2\wedge\lambda^4\wedge\left(-\tau\wedge\lambda^3\right)=\upsilon_g$,

$\tau\wedge\lambda^4\wedge*\left(\tau\wedge\lambda^4\right)=\tau\wedge\lambda^4\wedge\left(-\lambda^2\wedge\lambda^3\right)=-\upsilon_g$, $\lambda^2\wedge\lambda^3\wedge*\left(\lambda^2\wedge\lambda^3\right)=\lambda^2\wedge\lambda^3\wedge\left(\tau\wedge\lambda^4\right)=\upsilon_g$,

$\tau\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3\wedge*\left(\tau\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3\right)=\tau\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3\wedge\left(-\lambda^4\right)=-\upsilon_g$,

$\tau\wedge\lambda^2\wedge\lambda^4\wedge*\left(\tau\wedge\lambda^2\wedge\lambda^4\right)=\tau\wedge\lambda^2\wedge\lambda^4\wedge\left(\lambda^3\right)=-\upsilon_g$,

$\tau\wedge\lambda^3\wedge\lambda^4\wedge*\left(\tau\wedge\lambda^3\wedge\lambda^4\right)=\tau\wedge\lambda^3\wedge\lambda^4\wedge\left(-\lambda^2\right)=-\upsilon_g$,

$\lambda^2\wedge\lambda^3\wedge\lambda^4\wedge*\left(\lambda^2\wedge\lambda^3\wedge\lambda^4\right)=\lambda^2\wedge\lambda^3\wedge\lambda^4\wedge(-\tau)=\upsilon_g$.

6. Es seien $n=4$ und e_1,e_2,e_3,e_4 die orthonormalen Basiselemente bzgl. des euklidischen Skalarprodukts $\iota_{e_1}g(e_1)=\iota_{e_2}g(e_2)=\iota_{e_3}g(e_3)=\iota_{e_4}g(e_4)=1$, $\iota_{e_i}g(e_j)=0$, $i\neq j$. Dann sind

0-*Dualform* 4-*Dualform*

$$*1 = \mu_g = \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge \lambda^4, \qquad *\mu_g = 1$$

1-*Dualformen*

$$\begin{aligned}
*\lambda^1 &= \mu_g(e_1, \cdot, \cdot, \cdot) = \lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge \lambda^4, \\
*\lambda^2 &= \mu_g(e_2, \cdot, \cdot, \cdot) = -\mu_g(\cdot, e_2, \cdot, \cdot) = -\lambda^1 \wedge \lambda^3 \wedge \lambda^4, \\
*\lambda^3 &= \mu_g(e_3, \cdot, \cdot, \cdot) = \mu_g(\cdot, \cdot, e_3, \cdot) = \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^4, \\
*\lambda^4 &= \mu_g(e_4, \cdot, \cdot, \cdot) = -\mu_g(\cdot, \cdot, \cdot, e_4) = -\lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^3.
\end{aligned}$$

2-*Dualformen*

$$\begin{aligned}
*\left(\lambda^1 \wedge \lambda^2\right) &= \mu_g(e_1, e_2, \cdot, \cdot) = \lambda^3 \wedge \lambda^4, \\
*\left(\lambda^1 \wedge \lambda^3\right) &= \mu_g(e_1, e_3, \cdot, \cdot) = -\mu_g(e_1, \cdot, e_3, \cdot) = -\lambda^2 \wedge \lambda^4, \\
*\left(\lambda^1 \wedge \lambda^4\right) &= \mu_g(e_1, e_4, \cdot, \cdot) = \mu_g(e_1, \cdot, \cdot, e_4) = \lambda^2 \wedge \lambda^3, \\
*\left(\lambda^2 \wedge \lambda^3\right) &= \mu_g(e_2, e_3, \cdot, \cdot) = \mu_g(\cdot, e_2, e_3, \cdot) = \lambda^1 \wedge \lambda^4, \\
*\left(\lambda^2 \wedge \lambda^4\right) &= \mu_g(e_2, e_4, \cdot, \cdot) = -\mu_g(\cdot, e_2, \cdot, e_4) = -\lambda^1 \wedge \lambda^3, \\
*\left(\lambda^3 \wedge \lambda^4\right) &= \mu_g(e_3, e_4, \cdot, \cdot) = \mu_g(\cdot, \cdot, e_3, e_4) = \lambda^1 \wedge \lambda^2.
\end{aligned}$$

3-*Dualformen*

$$\begin{aligned}
*\left(\lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge \lambda^4\right) &= \mu_g(e_2, e_3, e_4, \cdot) = -\mu_g(\cdot, e_2, e_3, e_4) = -\lambda^1, \\
*\left(\lambda^1 \wedge \lambda^3 \wedge \lambda^4\right) &= \mu_g(e_1, e_3, e_4, \cdot) = \mu_g(e_1, \cdot, e_3, e_4) = \lambda^2, \\
*\left(\lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^4\right) &= \mu_g(e_1, e_2, e_4, \cdot) = -\mu_g(e_1, e_2, \cdot, e_4) = -\lambda^3, \\
*\left(\lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^3\right) &= \mu_g(e_1, e_2, e_3, \cdot) = \lambda^4.
\end{aligned}$$

Auch $** = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(g) = (-1)^{k(n-k)}$ ist selbstverständlich erfüllt.

Berechnen wir noch die Produkte $\beta \wedge *\beta = \xi \upsilon_g$

$$\lambda^1 \wedge *\lambda^1 = \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^4 \wedge \lambda^3 = \mu_g, \quad \lambda^2 \wedge *\lambda^2 = \lambda^2 \wedge \left(-\lambda^1 \wedge \lambda^3 \wedge \lambda^4\right) = \mu_g,$$

$$\lambda^3 \wedge *\lambda^3 = \lambda^3 \wedge \left(\lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^4\right) = \mu_g, \; \lambda^4 \wedge *\lambda^4 = \lambda^4 \wedge \left(-\lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^3\right) = \mu_g,$$

$$\lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge *\left(\lambda^1 \wedge \lambda^2\right) = \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \left(\lambda^3 \wedge \lambda^4\right) = \mu_g, \qquad \lambda^1 \wedge \lambda^3 \wedge *\left(\lambda^1 \wedge \lambda^3\right) = \lambda^1 \wedge \lambda^3 \wedge \left(-\lambda^2 \wedge \lambda^4\right) = \mu_g,$$

$$\lambda^1 \wedge \lambda^4 \wedge *\left(\lambda^1 \wedge \lambda^4\right) = \lambda^1 \wedge \lambda^4 \wedge \left(\lambda^2 \wedge \lambda^3\right) = \mu_g, \qquad \lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge *\left(\lambda^2 \wedge \lambda^3\right) = \lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge \left(\lambda^1 \wedge \lambda^4\right) = \mu_g,$$

$$\lambda^2 \wedge \lambda^4 \wedge *\left(\lambda^2 \wedge \lambda^4\right) = \lambda^2 \wedge \lambda^4 \wedge \left(-\lambda^1 \wedge \lambda^3\right) = \mu_g, \qquad \lambda^3 \wedge \lambda^4 \wedge *\left(\lambda^3 \wedge \lambda^4\right) = \lambda^3 \wedge \lambda^4 \wedge \left(\lambda^1 \wedge \lambda^2\right) = \mu_g$$

$$\lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge *\left(\lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^3\right) = \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge \left(\lambda^4\right) = \mu_g, \; \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^4 \wedge *\left(\lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^4\right) = \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^4 \wedge \left(-\lambda^3\right) = \mu_g,$$

$$\lambda^1 \wedge \lambda^3 \wedge \lambda^4 \wedge *\left(\lambda^1 \wedge \lambda^3 \wedge \lambda^4\right) = \lambda^1 \wedge \lambda^3 \wedge \lambda^4 \wedge \left(\lambda^2\right) = \mu_g, \; \lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge \lambda^4 \wedge *\left(\lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge \lambda^4\right) = \lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge \lambda^4 \wedge \left(-\lambda^1\right) = \mu_g.$$

Satz 1

Es gilt $\beta \wedge *\beta = \xi \upsilon_g$ für alle Basiselemente (Monome).

Für $\beta = \lambda^{i_1} \wedge \lambda^{i_2} \wedge \cdots \wedge \lambda^{i_k}$ ist

$$\xi = \beta\left(\boldsymbol{t}_{i_1}, \boldsymbol{t}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_k}\right) = \iota_{\boldsymbol{t}_{i_1}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_1}\right) \cdot \iota_{\boldsymbol{t}_{i_2}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_2}\right) \cdots \iota_{\boldsymbol{t}_{i_k}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_k}\right).$$

Im euklidischen Fall also $\xi = 1$.

Beweis

Es sei $\beta = \lambda^{i_1} \wedge \lambda^{i_2} \wedge \cdots \wedge \lambda^{i_k}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\beta \wedge *\beta &= \left(\lambda^{i_1} \wedge \lambda^{i_2} \wedge \cdots \wedge \lambda^{i_k}\right) \wedge *\left(\lambda^{i_1} \wedge \lambda^{i_2} \wedge \cdots \wedge \lambda^{i_k}\right) \\
&= \left(\lambda^{i_1} \wedge \lambda^{i_2} \wedge \cdots \wedge \lambda^{i_k}\right) \wedge \upsilon_g\left(\boldsymbol{t}_{i_1}, \boldsymbol{t}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_k}, \cdot, \cdot, \ldots, \cdot\right) \\
&= \iota_{\boldsymbol{t}_{i_1}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_1}\right) \cdot \iota_{\boldsymbol{t}_{i_2}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_2}\right) \cdots \iota_{\boldsymbol{t}_{i_k}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_k}\right) \cdot \upsilon_g
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\lambda^{i_1} \wedge \lambda^{i_2} \wedge \cdots \wedge \lambda^{i_k}\right) \wedge \upsilon_g\left(\boldsymbol{t}_{i_1}, \boldsymbol{t}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_k}, \cdot, \cdot, \ldots, \cdot\right)\right)\left(\boldsymbol{t}_{i_1}, \boldsymbol{t}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_k}, \boldsymbol{t}_{i_{k+1}}, \boldsymbol{t}_{i_{k+2}}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_n}\right) \\
&\qquad = \iota_{\boldsymbol{t}_{i_1}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_1}\right) \cdot \iota_{\boldsymbol{t}_{i_2}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_2}\right) \cdots \iota_{\boldsymbol{t}_{i_k}} g\left(\boldsymbol{t}_{i_k}\right) \cdot \upsilon_g\left(\boldsymbol{t}_{i_1}, \boldsymbol{t}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_k}, \boldsymbol{t}_{i_{k+1}}, \boldsymbol{t}_{i_{k+2}}, \ldots, \boldsymbol{t}_{i_n}\right).
\end{aligned}$$

Kommen wir nun zu den verallgemeinerten Metriken $G_p,\ 0 \le p \le n$ und den Differentialen d sowie $\boldsymbol{\delta}$. Zum Differential vergleiche[3].

Definition

Es sei $\alpha \in \bigwedge^p(V)$. Der Anfänger betrachte $V = \mathbb{K}^n,\ \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1. Unter dem Differential $d\alpha \in \bigwedge^{p+1}(V)$ verstehen wir die Abbildung

$$(d\alpha)(x)\left(\boldsymbol{b}_0, \ldots, \boldsymbol{b}_p\right) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \left(\alpha'(x)(\boldsymbol{b}_i)\right)\left(\boldsymbol{b}_0, \ldots, \hat{\boldsymbol{b}}_i, \ldots, \boldsymbol{b}_p\right),$$

wobei $\boldsymbol{b}_0, \ldots, \boldsymbol{b}_p \in V$.

2. Unter dem Codifferential[4] $\delta\alpha \in \bigwedge^{p-1}(V)$ verstehen wir die Abbildung

$$\delta = (-1)^{p(n-p+1)} \operatorname{sgn}(g) * d * = (-1)^{p+p(n-p)} \operatorname{sgn}(g) * * *^{-1} d * = (-1)^p *^{-1} d * .$$

$$\textstyle\bigwedge^p(V) \xrightarrow{\ *\ } \bigwedge^{n-p}(V) \xrightarrow{\ d\ } \bigwedge^{n-p+1}(V) \xrightarrow{\ *\ } \bigwedge^{n-(n-p+1)}(V) = \bigwedge^{p-1}(V)$$

[3] http://www.dr-gert-hillebrandt.de/pdf/Universitaet/Mathe/Mannigfaltigkeiten/Praeliminarien.pdf, Seite 17, Definition 0.6.3

[4] *http://www.dr-gert-hillebrandt.de/pdf/Universitaet/Mathe/Mannigfaltigkeiten/absolute_differentialrechnung.pdf, Seite 79, Definition 4.6*

3. Unter dem inneren Produkt zweier alternierender *p*-Formen $\alpha,\beta\in\bigwedge^p V$ verstehen wir

$$G_p(\alpha,\beta):=*(\alpha\wedge*\beta).$$

4. Es seien $\alpha\in\bigwedge^{p-1}V$, $\omega\in\bigwedge^p V$ Differentialformen mit kompakten Träger, d.h. $\operatorname{supp}(\gamma)=\overline{\{x\in M \mid \gamma(x)\neq 0\}}$ ist für eine Differentialform γ kompakt. Für beliebige $\eta,\lambda\in\bigwedge^p V$ definieren wir

$$[\eta\,|\,\lambda]_p:=\int_M \eta\wedge*\lambda=\int_M *^{-1}G_p(\eta,\lambda)$$

als neues globales Skalarprodukt.

Bemerkung zu 3.
Eine solche Definition macht Sinn, da $\alpha\wedge*\beta$ eine alternierende *n*-Linearform, d.h. ein Vielfaches der Volumenform $\alpha\wedge*\beta=k\cdot\upsilon$ und $\sigma\wedge*\sigma=\upsilon$ auf den Monomen (Basis) ist. Durch $*$ wird dann $*(\alpha\wedge*\beta)=k$ zugeordnet. Daher heißt $k\cdot\upsilon$ und damit jede *n*-Linearform auch Pseudoskalar. Mit $\xi=\sum\limits_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\ i_1<\cdots<i_k}} x_{i_1\cdots i_k}\lambda^{i_1}\wedge\lambda^{i_2}\wedge\cdots\wedge\lambda^{i_k}$ folgt im euklidischen Fall

$$\xi\wedge*\xi=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\ i_1<\cdots<i_k}} x^2_{i_1\cdots i_k}\cdot\mu\Rightarrow*(\xi\wedge*\xi)=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\ i_1<\cdots<i_k}} x^2_{i_1\cdots i_k}\,.$$

Daher wird manchmal auch nur der Pseudoskalar $G_p(\alpha,\beta)=\alpha\wedge*\beta$ zugeordnet.

Satz 2
Es seien $\alpha\in\bigwedge^p V$, $\beta\in\bigwedge^q V$. Dann gilt[5]

$$d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge d\beta\,.$$

Satz 3
Es seien $\alpha,\beta,\omega\in\bigwedge^p V$, $\sigma\in\bigwedge^{p-1}V$ gegeben. Dann gilt:

1. G_p ist symmetrisch, also $G_p(\alpha,\beta)=G_p(\beta,\alpha)$.
2. $G_{n-p}(*\alpha,*\beta)=\operatorname{sgn}(g)G_p(\alpha,\beta)$.
3. $[d\sigma,\omega]_p=[\sigma,\delta\omega]_{p-1}$.

[5] http://www.dr-gert-hillebrandt.de/pdf/Universitaet/Mathe/Mannigfaltigkeiten/Praeliminarien.pdf, Seite 18

Beweis

1. Zu prüfen ist $\alpha\wedge*\beta=\beta\wedge*\alpha$. Diese Aussage ist trivial, da

$$\begin{aligned}&a_{i_1\cdots i_p}\lambda^{i_1}\wedge\lambda^{i_2}\wedge\cdots\wedge\lambda^{i_p}\wedge b_{i_1\cdots i_p}\cdot\left(\pm\lambda^{i_{p+1}}\wedge\lambda^{i_{p+2}}\wedge\cdots\wedge\lambda^{i_n}\right)\\ &=b_{i_1\cdots i_p}\lambda^{i_1}\wedge\lambda^{i_2}\wedge\cdots\wedge\lambda^{i_p}\wedge a_{i_1\cdots i_p}\cdot\left(\pm\lambda^{i_{p+1}}\wedge\lambda^{i_{p+2}}\wedge\cdots\wedge\lambda^{i_n}\right).\end{aligned}$$

2. Mit $**=(-1)^{p(n-p)}\operatorname{sgn}(g)$ und 1. folgt

$$\begin{aligned}G_{n-p}(*\alpha,*\beta)&=*(*\alpha\wedge**\beta)\\ &=*\left(*\alpha\wedge(-1)^{p(n-p)}\operatorname{sgn}(g)\beta\right)\\ &=\operatorname{sgn}(g)*(\beta\wedge*\alpha)\\ &=\operatorname{sgn}(g)G_p(\beta,\alpha)\\ &=\operatorname{sgn}(g)G_p(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

3. Es seien $\sigma\in\bigwedge^{p-1}V$, $\omega\in\bigwedge^{p}V$. Nach Satz 2 ist mit $\delta=(-1)^p*^{-1}d*$

$$\begin{aligned}d(\sigma\wedge*\omega)&=d\sigma\wedge*\omega+(-1)^{p-1}\sigma\wedge d*\omega\\ &=d\sigma\wedge*\omega-(-1)^p\sigma\wedge**^{-1}d*\omega\\ &=d\sigma\wedge*\omega-\sigma\wedge*\delta\omega.\end{aligned}$$

   Nach dem allgemeinen Satz von Stokes gilt $\int_M d\varsigma=\int_{\partial M}\varsigma$. Hier ist $\partial M=\varnothing$, also $\int_M d(\sigma\wedge*\omega)=\int_\varnothing\sigma\wedge*\omega=0$. Folglich erhalten wir

$$[d\sigma,\omega]_p=\int_M d\sigma\wedge*\omega=\int_M\sigma\wedge*\delta\omega=[\sigma,\delta\omega]_{p-1}.$$

Werden die Koordinaten x^i in $(x^1,x^2,\dots,x^n)$ als Projektionen $x^i(x^1,x^2,\dots,x^n)=x^i$ interpretiert, so ist x^i eine lineare Abbildung und folglich $(x^i)'(x^1,x^2,\dots,x^n)=x^i$. Mithin sind die Differentiale

$$dx^i,\ 1\le i\le n$$

Basiselemente des Cotangentialraums (Dualraum des Tangentialraumes) und

$$\frac{\partial}{\partial x^i},\ 1\le i\le n$$

Basiselemente des Tangentialraumes, denn

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\delta_{ij},\ 1\le i,j\le n.$$

Sie werden durch ihr Transformationsverhalten erkannt.

Erinnerung:

Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\kappa \in \mathrm{Aut}(\mathbb{K})$ ein Körperautomorphismus und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$\psi : V \times V \to \mathbb{K}$$

heißt genau dann κ ***-Sesquilinearform auf*** V, wenn gilt

$$\textbf{\textit{Sqlf 1)}}\ \psi(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) := a\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + b\psi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

$$\textbf{\textit{Sqlf 2)}}\ \psi(\boldsymbol{x}, b\boldsymbol{y} + c\boldsymbol{z}) := \kappa(b)\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \kappa(c)\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ und $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$.

Wir sehen sofort, dass für jedes $\boldsymbol{y} \in V$ die Abbildung

$$\psi_{\boldsymbol{y}} : V \to \mathbb{K} \text{ mit } \psi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

eine ***Linearform*** ist, also $\psi_{\boldsymbol{y}} \in V^* := \mathcal{L}(V; \mathbb{K})$. V^* heißt ***Dualraum*** von V und ist selbst ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Entsprechend ist für jedes $\boldsymbol{x} \in V$ die Abbildung

$${}_{\boldsymbol{x}}\psi : V \to \mathbb{K} \text{ mit } {}_{\boldsymbol{x}}\psi(\boldsymbol{y}) = \psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

eine κ ***-Semilinearform***, also ${}_{\boldsymbol{x}}\psi \in V_\kappa^*$.

ψ heißt ***nicht entartet***, wenn für jedes $\boldsymbol{y} \in V, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ die Linearform $\psi_{\boldsymbol{y}} \neq 0$ ist.

Eine κ-Sesquilinearform auf V heißt genau dann ein ***Skalarprodukt auf*** V, wenn

Skp 1)	$\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \kappa(\psi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}))$	für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$,
Skp 2)	$\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0 \Leftarrow \boldsymbol{x} \neq 0$	für alle $\boldsymbol{x} \in V$.

Insbesondere folgt aus $\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \kappa(\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}))$ für alle $\boldsymbol{x} \in V$, dass $\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ für alle $\boldsymbol{x} \in V$.

Jedes Skalarprodukt ist daher nicht entartet.

Im Folgenden sei immer κ ***die Identität oder das Konjugieren,*** $\kappa(k) = \overline{k}$ ***für alle*** $k \in \mathbb{C}$ ***einer komplexen Zahl***, je nachdem, ob $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist. Den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ der hamiltonschen Zahlen betrachte ich hier nicht. Die zu ψ gehörige Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)$ bzgl. einer Basis $\mathcal{B}$ ist eine ***hermitesche Matrix***, d.h. für jedes $1 \leq i \leq n$ mit $\boldsymbol{e}_i = (0 \ldots 0 \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}} 0 \ldots 0)$ gilt:

$$\left(\boldsymbol{e}_i M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)\right)^T = \kappa\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)\boldsymbol{e}_i^T\right).$$

Die Diagonale ist folglich immer reell, da aus $a=\kappa(a)=\overline{a}$ sofort $\operatorname{Im}(a)=0$ folgt. Also ist κ die Identität und somit a reell. Hieraus folgt natürlich, dass sie mit ihrer Adjungierten übereinstimmt. Folglich gilt

$$\left(M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\psi)\right)^{*}=M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\psi)\Leftrightarrow\left(M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\psi)\right)^{T}=\kappa\left(M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\psi)\right)=\overline{M_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\psi)}.$$

Jede κ-Sesquilinearform ψ ist die Summe einer symmetrischen reellen Bilinearform $\sigma:=\frac{1}{2}(1_{\mathrm{K}}+\kappa)\circ\psi$ und einer schiefsymmetrischen imaginären Bilinearform $\eta:=\frac{1}{2}(1_{\mathrm{K}}-\kappa)\circ\psi$, d.h. $\psi=\sigma+\eta$ oder auch $\psi=\sigma+i\vartheta$, σ,ϑ reell.

Ein Skalarprodukt heißt

positiv definit, kurz ***pd***, wenn $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$ für alle $\boldsymbol{x}\in V$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$.

negativ definit, kurz ***nd***, wenn $-\psi$ positiv definit ist.

indefinit, wenn es sowohl $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$ und $\psi(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})<0$ für je ein $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ gibt.

Bei der ***Semidefinitheit*** darf auch $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$ sein. In diesem Artikel kommen ***keine semidefiniten*** Produkte vor. Ein Skalarprodukt ist immer positiv definit oder indefinit.

Zu jeder Basis $\mathscr{B}:=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n\}$ eines *n*-dimensionalen Vektorraums existiert eine ***orthogonale Basis*** $\mathscr{O}:=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\ldots,\boldsymbol{t}_n\}$. Es gilt folglich $\psi(\boldsymbol{t}_i,\boldsymbol{t}_j)=0$ für $i\neq j$ und $\psi(\boldsymbol{t}_i,\boldsymbol{t}_i)=\pm 1$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Sind ζ die Anzahl der Pluszeichen und $\nu=n-\zeta$ die Anzahl der negativen Zeichen, so heißt die Zahl $s=\zeta-\nu=2\zeta-n$ die ***Signatur des Vektorraumes*** V ***mit Skalarprodukt*** ψ. Wir setzen $\operatorname{sgn}(g):=(-1)^{\frac{n-s}{2}}=(-1)^{n-\zeta}=(-1)^{\nu}$.

Ein reeller Vektorraum versehen mit einem positiv definiten Skalarprodukt, wo $\kappa=id$ die Identität ist, d.h. $\kappa(k)=k$ für alle $k\in K$ heißt ***euklidischer Raum*** $\mathfrak{E}=(V;\mathfrak{s})$.

Ein komplexer Vektorraum versehen mit einem positiv definiten Skalarprodukt, wo $\kappa=\overline{}$ das Konjugieren ist, heißt ***unitärer Raum*** $\mathfrak{H}=(V;\mathfrak{h})$. Für ein positiv definites Skalarprodukt ψ ist es mit Blick auf Mannigfaltigkeiten üblich, das positiv definite Skalarprodukt mit g zu bezeichnen, da zu jedem Punkt $p\in M$ der Mannigfaltigkeit ein solches Skalarprodukt g_p auf dem Tangentialraum T_pM definiert ist. Der Anfänger stelle sich $M=\mathbb{R}^n$ als affinen Raum A_n (lineare Mannigfaltigkeit) vor, dann ist der Vektorraum V der Darstellungsraum. An jedem Punkt a ist folglich ein Vektorraum „angeheftet“ $(a,\boldsymbol{v})\in\{a\}\times V$. Es gilt folglich

$$(a,\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=:(a,\boldsymbol{v}_1)+(a,\boldsymbol{v}_2)\text{ und }(a,\boldsymbol{v}x)=:(a,\boldsymbol{v})x.$$

Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen und g eine Metrik auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Mit $\mathcal{L}(V;\mathbb{K})$ bezeichnen wir den Vektorraum der $\mathbb{K}$***-Linearformen*** und setzen $V^* := \mathcal{L}(V;\mathbb{K})$. Für den Vektorraum der κ***-Semilinearformen*** setzen wir $V_\kappa^* := \mathcal{L}(V_\kappa;\mathbb{K})$. Beide Dualräume V^* und V_κ^* haben natürlich κ-gleiche Basen, d.h.: Ist z ein Basiselement in V^*, so ist $\kappa(z)$ ein Basiselement in V_κ^* und umgekehrt. Für $\boldsymbol{x} \in V$ sei $\iota_{\boldsymbol{x}} g \in V_\kappa^*$ definiert durch $(\iota_{\boldsymbol{x}} g)(\boldsymbol{y}) := g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ für alle $\boldsymbol{y} \in V_\kappa$. $\iota_{\boldsymbol{x}}$ bildet κ-Sesquilinearformen in κ-Semilinearformen ab, also $\iota_{\boldsymbol{x}} : \mathcal{L}(V, V_\kappa;\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(V_\kappa;\mathbb{K})$. Weiter definieren wir für $\boldsymbol{y} \in V_\kappa$ die Linearform $\iota_{\boldsymbol{y}}^\kappa g \in V^*$ durch $\iota_{\boldsymbol{y}}^\kappa g(\boldsymbol{x}) := \kappa(g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})) = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. $\iota_{\boldsymbol{y}}^\kappa$ bildet κ-Sesquilinearformen in Linearformen $\mathcal{L}(V;\mathbb{K})$ ab, also $\iota_{\boldsymbol{y}}^\kappa : \mathcal{L}(V, V_\kappa;\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(V;\mathbb{K})$. Die Abbildung $\iota_{\boldsymbol{x}}$ heißt daher ***Verjüngung, inneres Produkt*** oder auch ***Kontraktion***. Die Abbildung $\iota_{\boldsymbol{y}}^\kappa$ heißt daher auch κ***-Verjüngung***. Wir setzen wieder $\iota_{\boldsymbol{y}}^{1_{\mathbb{K}}} =: \iota_{\boldsymbol{y}}$ für das euklidische Skalarprodukt.

$$j : \begin{cases} V & \to V_\kappa^* \\ \boldsymbol{x} & \mapsto \iota_{\boldsymbol{x}} g \end{cases}$$

ist ein $\mathbb{K}$***-Isomorphismus***, wobei κ als Identität weggelassen wird. Ist $\mathscr{B} := \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine Basis von V, so ist $\mathscr{B}_g^* := \{\iota_{\boldsymbol{b}_1} g, \iota_{\boldsymbol{b}_2} g, \ldots, \iota_{\boldsymbol{b}_n} g\}$ eine Basis des Dualraumes vermöge g. Wir definieren noch $\lambda_i := \iota_{\boldsymbol{b}_i} g$ für alle $i \in \mathbb{N}, i \leq n$. Insbesondere ist für die orthonormale Basis $\mathscr{O}_g = \{\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_n\}$ die duale Basis $\mathscr{O}_g^* := \mathscr{O}_g(V^*) := \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ trivialerweise auch orthonormal.

Eine auf einer Basis nichtverschwindende alternierende *n*-Linearform Δ heißt ***Determinantenform***. Ist $\mathscr{B} := \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine Basis von V, so gilt folglich $\Delta(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n) \neq 0$ und für beliebige von null verschiedene Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$

$$\Delta\left(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{v}_i}_{i-\text{te Stelle}}, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{v}_j}_{j-\text{te Stelle}}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\right) = -\Delta\left(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{v}_j}_{i-\text{te Stelle}}, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{v}_i}_{j-\text{te Stelle}}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\right).$$

Eine Determinantenform ist folglich positiv oder negativ. Gilt $\Delta(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = 1$, so heißt die Determinantenform ***normiert*** bzgl. $\mathscr{B}$. Wir bezeichnen sie mit $\Delta_{\mathscr{B}}$. Sind nun $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in V$ Vektoren, so heißt $\Delta_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ die Determinante des *n*-Tupels $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$. Die ***Determinante*** $\det(\cdot)$ ist ein sogenannter ***Pseudoskalar***. Es gilt also

$$\Delta_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \cdot \Delta_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n).$$

Für eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$, also $\varphi \in \operatorname{End}_{\mathbf{K}}(V)$ gilt

$$\Delta_{\mathcal{B}}(\varphi(\boldsymbol{b}_1), \varphi(\boldsymbol{b}_2), \ldots, \varphi(\boldsymbol{b}_n)) = \det(\varphi) \cdot \Delta_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n).$$

Ist $\varphi^* : V^* \to V^*$ die zu φ duale lineare Abbildung, so gilt

$$\det(\varphi^*) = \det(\varphi).$$[6]

Ist $\Phi \in \operatorname{Iso}_{\mathrm{K}}(W, V)$ und $\Delta_{\mathcal{B}}$ eine Determinantenform auf V, so ist $\Phi^* \Delta_{\mathcal{B}}$ definiert durch

$$(\Phi^* \Delta_{\mathcal{B}})(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) := \Delta_{\mathcal{B}}(\Phi(\boldsymbol{a}_1), \Phi(\boldsymbol{a}_2), \ldots, \Phi(\boldsymbol{a}_n))$$

eine Determinantenform auf W.

Für einen Basiswechsel von einer Basis $\mathcal{A} := \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ zu einer Basis $\mathcal{B} := \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ schreiben wir $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(1_V)$.[7] Folglich ist

$$\Delta_{\mathcal{B}}\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(1_V)\boldsymbol{a}_1, M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(1_V)\boldsymbol{a}_2, \ldots, M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(1_V)\boldsymbol{a}_n\right) = \det\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(1_V)\right) \cdot \Delta_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n).$$

Ist darüber hinaus $\Delta_{\mathcal{B}}$ die Auswertung auf einer Orthonormalbasis $\mathcal{O}_g := \{\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_n\}$ bzgl. g, so heißt die normierte Determinantenform $\Delta_{\mathcal{O}_g}$ ***normierte Volumenform***. Wir bezeichnen sie mit μ_g, wenn $\mu_g(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_n) = 1$ und nennen die ***Basis*** $\mathcal{O}_g$ ***positiv orientiert***. Die Volumenform μ_g bestimmt folglich eine ***Orientierung auf dem Vektorraum***. Permutieren wir die Basiselemente der Orthonormalbasis nicht, so heißt die Orthonormalbasis ***geordnet***.

Es seien $\mathcal{B} := \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine Basis von V und $\mathcal{S} := \{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n\}$ eine Orthonormalbasis von V bzgl. g. Beide seien geordnet. Es seien $\mathcal{B}^* := \{\boldsymbol{b}_1^*, \boldsymbol{b}_2^*, \ldots, \boldsymbol{b}_n^*\}$ und $\mathcal{S}^* := \{\boldsymbol{s}_1^*, \boldsymbol{s}_2^*, \ldots, \boldsymbol{s}_n^*\}$ die zugehörigen Dualbasen. g^* sei definiert durch die Basiswechsel (beachten Sie $s_i := \iota_{\boldsymbol{s}_i^*}^{\kappa} g^*$)

$$\boldsymbol{s}_i = \sum_{k=1}^{n} g^*(\boldsymbol{b}_k^*, \boldsymbol{s}_i^*)\boldsymbol{b}_k \text{ und } \boldsymbol{b}_k^* = \sum_{i=1}^{n} g^*(\boldsymbol{b}_k^*, \boldsymbol{s}_i^*)\boldsymbol{s}_i^*.$$

Mit $\iota_{\boldsymbol{y}}^{\kappa}$ folgt

$$\delta_{ij} = \iota_{\boldsymbol{s}_j}^{\kappa} g(\boldsymbol{s}_i) = \sum_{k=1}^{n} g^*(\boldsymbol{b}_k^*, \boldsymbol{s}_i^*)\iota_{\boldsymbol{s}_j}^{\kappa} g(\boldsymbol{b}_k) = \sum_{k=1}^{n} g^*(\boldsymbol{b}_k^*, \boldsymbol{s}_i^*)\kappa(g(\boldsymbol{s}_j, \boldsymbol{b}_k)) = \sum_{k=1}^{n} g^*(\boldsymbol{b}_k^*, \boldsymbol{s}_i^*) g(\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{s}_j),$$

6 *Greub, W.: Linear Algebra, Fourth Edition, 4.11 The determinant of dual Transformations, p. 113*

7 *Lang, S.: Linear Algebra, Second Edition, Addison-Wesley, p. 128, p. 218*

also

$$g\left(\boldsymbol{s}_i,\boldsymbol{s}_j\right)=\sum_{k=1}^{n}\kappa\left(g^*\left(\boldsymbol{s}_i^*,\boldsymbol{b}_k^*\right)\right)g\left(\boldsymbol{b}_k,\boldsymbol{s}_j\right).$$

Die duale Metrik g^* ist folglich invers zur Metrik g. Damit sind

$$\boldsymbol{b}_k=\sum_{i=1}^{n}g\left(\boldsymbol{b}_k,\boldsymbol{s}_i\right)\boldsymbol{s}_i \text{ und } \boldsymbol{s}_i^*=\sum_{k=1}^{n}g\left(\boldsymbol{b}_k,\boldsymbol{s}_i\right)\boldsymbol{b}_k^*$$

die inversen Basiswechsel.

Sind $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, so erhalten wir

$$\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{n}g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{s}_i\right)\boldsymbol{s}_i \text{ und } g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\sum_{k=1}^{n}g\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{s}_k\right)\kappa\left(g\left(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s}_k\right)\right).$$

Insbesondere finden wir

$$g\left(\boldsymbol{b}_j,\boldsymbol{b}_i\right)=\sum_{k=1}^{n}g\left(\boldsymbol{b}_j,\boldsymbol{s}_k\right)\kappa\left(g\left(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{s}_k\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}g\left(\boldsymbol{b}_j,\boldsymbol{s}_k\right)g\left(\boldsymbol{s}_k,\boldsymbol{s}_k\right)g\left(\boldsymbol{s}_k,\boldsymbol{b}_i\right),$$

also

$$g\left(\boldsymbol{b}_j,\boldsymbol{b}_i\right)=\sum_{k=1}^{n}g\left(\boldsymbol{b}_j,\boldsymbol{s}_k\right)g\left(\boldsymbol{s}_k,\boldsymbol{s}_k\right)g\left(\boldsymbol{s}_k,\boldsymbol{b}_i\right).$$

Die Matrizen

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\left(g\right)=\left(\left(g\left(\boldsymbol{b}_j,\boldsymbol{b}_i\right)\right)_{1\le j\le n,1\le i\le n}\right),\ M_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}\left(g\right)=\left(\left(g\left(\boldsymbol{s}_m,\boldsymbol{s}_l\right)\right)_{1\le m\le n,1\le l\le n}\right)$$

heißen ***Fundamentalmatrizen***. Ihre Determinanten stimmen überein.

$$\det\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\left(g\right)\right)=\det\left(M_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}\left(g\right)\right)=:\det\left(g\right)$$

Die zugehörige duale Fundamentalmatrix ist folglich invers dazu, also

$$\det\left(g^*\right)=\det\left(g^{*T}\right)=\det\left(\kappa g^*\right)=\det\left(g^{-1}\right)=\left(\det\left(g\right)\right)^{-1}.$$

Es sei $\mu_g^{\mathcal{S}^*}$ eine normierte Volumenform bzgl. einer Orthonormalbasis $\mathcal{S}:=\left\{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\ldots,\boldsymbol{s}_n\right\}$ von V mit Skalarprodukt g, also $1=\mu_g^{\mathcal{S}^*}\left(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\ldots,\boldsymbol{s}_n\right)$. Es sei $\mu_g^{\mathcal{B}^*}$ die Volumenform bzgl. einer beliebigen anderen geordneten Basis $\mathcal{B}:=\left\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n\right\}$, nicht notwendig orthonormal. Dann gilt mit $\left|g\right|=\det\left(g\right)$ die Gleichung

$$\mu_g^{\mathcal{S}^*}=\sqrt{\left|g\right|}\mu_g^{\mathcal{B}^*}.$$

Folgt sofort aus $g\left(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} g\left(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{s}_k\right) g\left(\boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{s}_l\right) g\left(\boldsymbol{s}_l, \boldsymbol{b}_i\right)$, da

$$\begin{aligned}
\det(g) &= \det\left(\left(g\left(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_i\right)\right)_{1\le j\le n,\, 1\le i\le n}\right) \\
&= \det\left(\left(\left(g\left(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{s}_k\right)\right)_{1\le j\le n,\, 1\le k\le n}\right)\left(\left(g\left(\boldsymbol{s}_l, \boldsymbol{b}_i\right)\right)_{1\le l\le n,\, 1\le i\le n}\right)\right) \\
&= \det\left(\left(\left(\kappa g\left(\boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{b}_j\right)\right)_{1\le k\le n,\, 1\le j\le n}\right)\left(\left(g\left(\boldsymbol{s}_l, \boldsymbol{b}_i\right)\right)_{1\le l\le n,\, 1\le i\le n}\right)\right) \\
&= \det\left(\left(\kappa g\left(\boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{b}_j\right)\right)_{1\le k\le n,\, 1\le j\le n}\right)\det\left(\left(g\left(\boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{b}_j\right)\right)_{1\le k\le n,\, 1\le j\le n}\right) \\
&= \det\left(\left(g\left(\boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{b}_j\right)\right)_{1\le k\le n,\, 1\le j\le n}\right)^T \det\left(\left(g\left(\boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{b}_j\right)\right)_{1\le k\le n,\, 1\le j\le n}\right) \\
&= \det\left(\left(g\left(\boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{b}_j\right)\right)_{1\le k\le n,\, 1\le j\le n}\right)\det\left(\left(g\left(\boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{b}_j\right)\right)_{1\le k\le n,\, 1\le j\le n}\right) \\
&= \left(\det\left(\left(g\left(\boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{b}_j\right)\right)_{1\le k\le n,\, 1\le j\le n}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{\det(g)} = \det\left(\left(g\left(\boldsymbol{s}_k, \boldsymbol{b}_j\right)\right)_{1\le k\le n,\, 1\le j\le n}\right).$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\mu_g^{\mathcal{S}^*} &= \boldsymbol{s}_1^* \wedge \boldsymbol{s}_2^* \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{s}_n^* \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} g\left(\boldsymbol{b}_{k_1}, \boldsymbol{s}_1\right)\boldsymbol{b}_{k_1}^* \wedge \sum_{k_2=1}^{n} g\left(\boldsymbol{b}_{k_2}, \boldsymbol{s}_2\right)\boldsymbol{b}_{k_2}^* \wedge \cdots \wedge \sum_{k_n=1}^{n} g\left(\boldsymbol{b}_{k_n}, \boldsymbol{s}_n\right)\boldsymbol{b}_{k_n}^* \\
&= \det\left(g\left(\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{s}_j\right)\right)\boldsymbol{b}_1^* \wedge \boldsymbol{b}_2^* \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_n^* \\
&= \det\left(g\left(\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{s}_j\right)\right)\mu_g^{\mathcal{B}^*} \\
&= \sqrt{|g|}\,\mu_g^{\mathcal{B}^*}
\end{aligned}$$

ist alles gezeigt.

Es folgen noch einige Satze über riemannsche Räume.

Satz 4

Es sei g eine riemannsche Metrik. Es sei $\vartheta : V \to \mathbb{K}$ eine Linearform. Dann existiert genau ein $\boldsymbol{w} \in V$, so dass für alle $\boldsymbol{v} \in V$ gilt $\vartheta(\boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

Beweis

Es sei $\mathcal{O}_g := \{\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_n\}$ eine Orthonormalbasis bzgl. g. Es sei $w := \sum_{i=1}^{n} \kappa(\vartheta(\boldsymbol{t}_i))\boldsymbol{t}_i$. Definiere $\theta(\boldsymbol{v}) := g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ für alle $\boldsymbol{v} \in V$. Dann sind

$$\theta(\boldsymbol{t}_j) = g(\boldsymbol{t}_j, \boldsymbol{w}) = g(\boldsymbol{t}_j, \kappa(\vartheta(\boldsymbol{t}_i))\boldsymbol{t}_i) = \kappa^2(\vartheta(\boldsymbol{t}_j)) \cdot g(\boldsymbol{t}_j, \boldsymbol{t}_j) = \vartheta(\boldsymbol{t}_j)$$

auf allen Basiselementen, also $\theta = \vartheta$.

Angenommen, es existiert ein $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{w}$ mit $\vartheta(\boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ für alle $\boldsymbol{v} \in V$. Dann ist $g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \Leftrightarrow g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}) = 0$ für alle $\boldsymbol{v} \in V$, also auch $g(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}) = 0$. Da g nicht ausgeartet ist, folgt $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$.

Satz 5

Es sei g eine riemannsche Metrik. Es sei $\Lambda : V \to V$ ein Endomorphismus. Dann existiert genau ein Endomorphismus $\Lambda^* : V_\kappa \to V_\kappa$, so dass für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ gilt

$$g(\Lambda(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = g(\boldsymbol{v}, \Lambda^*(\boldsymbol{w})).$$

Beweis

Es sei $\boldsymbol{u} \in V$ fest gewählt. Es sei $\vartheta_{\boldsymbol{u}}$ definiert durch $\vartheta_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) := g(\Lambda(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u})$ für alle $\boldsymbol{v} \in V$. Folglich ist $\vartheta_{\boldsymbol{u}} : V \to \mathbb{K}$ eine Linearform. Nach Satz 3 existiert genau ein $\boldsymbol{w} \in V$, so dass für alle $\boldsymbol{v} \in V$ gilt $\vartheta_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$. Wir definieren $\Lambda^*(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}$. Dann ist schon

$$\vartheta_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = g(\Lambda(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}) = g(\boldsymbol{v}, \Lambda^*(\boldsymbol{u})) \text{ für alle } \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V.$$

Zu zeigen bleibt die Semilinearität. Dazu seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ und $a, b \in \mathbb{K}$, also

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{v}, \Lambda^*(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y})) &= g(\Lambda(\boldsymbol{v}), a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) \\ &= \kappa(a) g(\Lambda(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{x}) + \kappa(b) g(\Lambda(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{y}) \\ &= \kappa(a) g(\boldsymbol{v}, \Lambda^*(\boldsymbol{x})) + \kappa(b) g(\boldsymbol{v}, \Lambda^*(\boldsymbol{y})) \\ &= g(\boldsymbol{v}, a\Lambda^*(\boldsymbol{x})) + g(\boldsymbol{v}, b\Lambda^*(\boldsymbol{y})). \end{aligned}$$

Da dies für alle $\boldsymbol{v} \in V$ gilt, also $\Lambda^*(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = a\Lambda^*(\boldsymbol{x}) + b\Lambda^*(\boldsymbol{y})$ und Λ^* ist linear.

Definition 6
Es sei g eine riemannsche Metrik. Der eindeutig bestimmte Endomorphismus $\Lambda^*: V_\kappa \to V_\kappa$ mit

$$g\big(\Lambda(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\big) = g\Big(\boldsymbol{v}, \Lambda^*(\boldsymbol{w})\Big)$$

für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ heißt adjungiert zu dem Endomorphismus $\Lambda: V \to V$.

Korollar 7
$\left(\Psi + \Lambda\right)^* = \Psi^* + \Lambda^*$, $\left(\Psi\Lambda\right)^* = \Lambda^*\Psi^*$, $\left(k\Lambda\right)^* = \kappa(k)\Lambda^*$, $\left(\Lambda^*\right)^* = \Lambda$