Alternierende Differentialformen

Sollen multilineare Methoden der linearen Algebra mit Methoden der Analysis verknüpft werden, so ist ein erster Schritt die Verwendung von Differentialformen. Sie sind invariant gegenüber Koordinatenwechsel, messen Längen, Flächen, Volumina, Krümmung etc. Sie vereinfachen den Rechenaufwand erheblich, lassen sich sehr gut auf Mannigfaltigkeiten (krummlinie Koordinaten) übertragen. Sie sind die allgemeinste Formulierung für Differentialgleichungen jedweder Art. Sie unterscheiden sich jedoch von sogenannten „Strömen", die ein anderes Transformationsverhalten haben. Ströme spielen in der Physik eine große Rolle und sind unter anderen von der Metrik, insbesondere Orientierung abhängig. Hier seien nur Hermann Weyl, Georges de Rham und William Vallance Douglas Hodge erwähnt. Neben diesen natürlich auch Hermann Graßmann, ohne dem diese Theorie niemals entstanden wäre, wie durch Élie Joseph Cartan erkannt und weiter entwickelt wurde, obwohl Leopold Kronecker sie bekämpfte. Diese „Ströme" können auch durch Differentialformen beschrieben werden und werden in die Theorie der Distributionen eingebettet. An dieser Stelle frage ich mich immer: Sollte ein Strom in der Physik ein mathematischer „Strom" sein oder sollte ein Strom aus der „Anschauung" entstehen, wobei wir in den meisten Fällen im Modell glauben einen Strom vor uns zu haben. Schön wäre es, wenn beides übereinstimmt, was in der Tat in fast allen Fällen auch so ist. Die Theorie der Formen und Stöme mündet in die Homologie und Kohomologie.

Differentialformen und Ströme können leicht auf vektorwertige verallgemeinert werden. Dieses ist ein erster Schritt und kann weiter zu Objekten ausgebaut werden, in denen die „Koeffizienten" Differentialformen bzw. Ströme sind.

Ich habe hier Auszüge aus meiner Vorlesung „Differenzierbare Mannigfaltigkeiten" entnommen, obwohl ich heute Kleinigkeiten ändern würde. Niemals würde ich jedoch auf die koordinatenfreie Beschreibung verzichten und die aberwitzige Schreibweise der Physiker benutzen. Eine solche Beschreibung führt nicht zu einer Einsicht, sondern zu einer Verwirrung. Solche Bemerkungen wie: Wir wollen doch Physik betreiben, lenkt nur von der eigenen Unzulänglichkeit ab. Dazu gehören auch Matrizen, die einfach so hingeschrieben werden und Tensoren heißen.

Ich wünsche gutes Verstehen und viel Erfolg.

Gert Hillebrandt

Motivation durch einführende Beispiele

Es sei $\mathcal{A}_n$ der $n-$dimensionale affine Raum. π^i bezeichne die Projektion auf die $i-$te Koordinate, d.h. $\pi^i\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right)=x^i$ und ist folgedessen eine Linearform, wenn wir den Punkteraum auch als Vektorraum interpretieren. Nun gilt für eine lineare Abbildung $\lambda\in\mathcal{L}\left(\boldsymbol{E};\boldsymbol{F}\right)$ von Banachräumen $\lambda'(\boldsymbol{e})=\lambda$, so dass wir $d\pi^i\big|_{\boldsymbol{e}}=\pi^i$ suggestiv interpretieren dürfen. Da die Koordinaten meist mit $x,y,z,\ldots$ oder $x^1,x^2,x^3,\ldots$ bezeichnet werden, hat sich z.B. $d\pi^3=dz=dx^3=\ldots$ durchgesetzt. Differentiale, auch kovariante Vektoren genannt, leben in Kotangentialräumen und messen auf Tangentialräumen. Tangentialvektoren heißen auch kontravariante Vektoren. Dies ist aber nur möglich, wenn die zu betrachtende Stelle übereinstimmt.

Betrachten wir für den Tangentialraum die Ableitung eines differenzierbaren Funktionals in Richtung des Vektors $\boldsymbol{v}={}^T\!\begin{pmatrix}v^1 & v^2 & \cdots & v^n\end{pmatrix}$ an der Stelle $\boldsymbol{e}$. Es ist

$$D_{\boldsymbol{v}}f\big|_{\boldsymbol{e}}=\frac{d}{dt}\left(f\left(\boldsymbol{e}+t\boldsymbol{v}\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}v^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\boldsymbol{e}}\left(f\right).$$

Jede Richtungsableitung ist folglich eine Linearkombination der partiellen Ableitungen. Interpretieren wir den Vektor $\boldsymbol{v}$ als einen Tangentialvektor, so ist

$$\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n}v^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Die partiellen Ableitungen werden demzufolge als Basisvektoren oder lineares Erzeugendensystem oder linearer Rahmen des Tangentialraumes aufgefasst. Jetzt muss nur noch untersucht werden, wie sich dieser Rahmen unter Abbildungen zwischen Räumen und deren Tangentialräumen transformiert, insbesondere, wie gemessen wird. Wegen

$$v^j=dx^j\left(\boldsymbol{v}\right)=dx^j\left(\sum_{i=1}^{n}v^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\sum_{i=1}^{n}v^i dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\sum_{i=1}^{n}v^i\delta_i^j \text{ also } dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial x^j}{\partial x^i}=\delta_i^j$$

sind dx^i, $1\le i\le n$ und $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $1\le i\le n$ für $i\in\mathbb{N}$ dual zueinander. Es darf auch $f:=x^j$ gesetzt werden.

Beispiele

1. Es sei $\mathcal{A}_2$ eine affine Ebene. Berechne für das affine Koordinatensystem $\left\{(0,0),(1,2),(3,4)\right\}$ die Zahl $\left(dx+dy\right)\wedge\left(dx-dy\right)\left((0,0),(1,2),(3,4)\right)$.

Die erzeugenden Vektoren sind durch $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial x^1}+2\frac{\partial}{\partial x^2}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=3\frac{\partial}{\partial x^1}+4\frac{\partial}{\partial x^2}$ gegeben. Wir berechnen $\alpha:=\left(dx+dy\right)\wedge\left(dx-dy\right)=-2dx\wedge dy$. Die Auswertung liefert

a)
$$\begin{aligned}\alpha\left(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\right)&=-2dx\wedge dy\left(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\right)=-2\left(dx\left(\boldsymbol{v}_1\right)dy\left(\boldsymbol{v}_2\right)-dy\left(\boldsymbol{v}_1\right)dx\left(\boldsymbol{v}_2\right)\right)\\&=-2\cdot\left(1\cdot4-2\cdot3\right)=-2\cdot(-2)\\&=4.\end{aligned}$$

b) $\alpha(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^1}+2\frac{\partial}{\partial x^2},3\frac{\partial}{\partial x^1}+4\frac{\partial}{\partial x^2}\right)=4\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)+2\cdot 3\cdot\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^1}\right)$

$$=-2\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)=-2\cdot(-2)$$
$$=4.$$

Welche der beiden Rechnungen bevorzugt wird, ist Geschmackssache.

2. Es seien die 1-Differentialformen $\alpha := ydx - xdy + dz$, $\omega := \alpha - vdu$ über $\mathbb{R}^3$ gegeben. Zeigen Sie, dass u und v von z unabhängig seien müssen und $2+D_1vD_2u-D_2vD_1u=0$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} D_1u \\ D_2u \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} D_2v \\ -D_1v \end{pmatrix}=2$ erfüllt sein muss, damit ω geschlossen ist.

Lösung

Hier geht es um eine lokal existierende Stammfunktion ξ mit $d\xi=\omega$. Voraussetzungen sind $d\omega=0$ und $\omega\wedge d\omega=0$.

Wir finden $d\omega = d\alpha - dv\wedge du$ mit $d\alpha=-2dx\wedge dy$ und $du=D_1udx+D_2udy+D_3udz$ sowie $dv\wedge du=(D_1vD_2u-D_2vD_1u)dx\wedge dy+(D_2vD_3u-D_3vD_2u)dy\wedge dz+(D_3vD_1u-D_1vD_3u)dz\wedge dx$.

Hieraus folgt

$$2+D_1vD_2u-D_2vD_1u=0,\ D_2vD_3u-D_3vD_2u=0,\ D_3vD_1u-D_1vD_3u=0.$$

Ferner folgt aus

$$0=\omega\wedge d\omega=(\alpha-vdu)\wedge d\omega$$
$$=-\left[2+D_1vD_2u-D_2vD_1u-x(D_3vD_1u-D_1vD_3u)+y(D_2vD_3u-D_3vD_2u)-2vD_3u\right]dx\wedge dy\wedge dz$$

noch $vD_3u=0$. Dies hat mit $v\neq 0$ zur Konsequenz, dass $D_3u=0$ und damit u unabhängig von z ist. Damit reduzieren sich die Gleichungen auf

$$2+D_1vD_2u-D_2vD_1u=0,\ D_3vD_2u=0,\ D_3vD_1u=0$$
$$2+D_1vD_2u-D_2vD_1u-xD_3vD_1u-yD_3vD_2u=0$$

und wir erkennen, dass u nicht von x und y unabhängig sein kann, da $2\neq 0$. Ergo: u ist auch unabhängig von z. Aus

$$d\xi=\omega \Leftrightarrow D_1\xi dx+D_2\xi dy+D_3\xi dz=(y-vD_1u)dx-(x+vD_2u)dy+dz$$
$$D_1\xi=y-vD_1u,\ D_2\xi=-(x+vD_2u),\ D_3\xi=1$$

entnehmen wir

$$\xi(x,y,z)=\zeta(x,y)+z.$$

In der Theorie der Mannigfaltigkeiten sind auch vektorwertige Differentialformen von Bedeutung. Betrachten wir die vektorwertige Differentialform

$$\kappa_1 := dy\wedge dz\cdot\frac{\partial}{\partial x}+dz\wedge dx\cdot\frac{\partial}{\partial y}+dx\wedge dy\cdot\frac{\partial}{\partial z}.$$

Es handelt sich um einen Vektor, deren Koeffizienten Differentialformen sind. Für

$$\boldsymbol{a} = a^1 \frac{\partial}{\partial x} + a^2 \frac{\partial}{\partial y} + a^3 \frac{\partial}{\partial z} \text{ und } \boldsymbol{b} = b^1 \frac{\partial}{\partial x} + b^2 \frac{\partial}{\partial y} + b^3 \frac{\partial}{\partial z}$$

ergibt sich durch Auswerten.

$$\begin{aligned}\kappa_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= dy \wedge dz(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + dz \wedge dx(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \cdot \frac{\partial}{\partial y} + dx \wedge dy(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \left(a^2 b^3 - a^3 b^2\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \left(a^3 b^1 - a^1 b^3\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \left(a^1 b^2 - a^2 b^1\right) \cdot \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

Das Kreuzprodukt ist natürlich sofort zu erkennen. Das Kreuzprodukt ordnet zwei Vektoren, die eine Ebene aufspannen, einen dazu senkrechten Vektor zu.

Es geht auch ohne Koordinaten. Dazu sei μ die normierte Volumenform (Determinantenform). Wir definieren

$$\kappa_2 := \sum_{i=1}^{3} \iota_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ wobei } \iota_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mu(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) := \mu\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\right),$$

dann ist als Beispiel

$$\begin{aligned}\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\right) &= \mu\left(\frac{\partial}{\partial x}, a^1 \frac{\partial}{\partial x} + a^2 \frac{\partial}{\partial y} + a^3 \frac{\partial}{\partial z},\, b^1 \frac{\partial}{\partial x} + b^2 \frac{\partial}{\partial y} + b^3 \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= \mu\left(\frac{\partial}{\partial x}, a^2 \frac{\partial}{\partial y} + a^3 \frac{\partial}{\partial z},\, b^2 \frac{\partial}{\partial y} + b^3 \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= a^2 b^3 \mu\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) + a^3 b^2 \mu\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= \left(a^2 b^3 - a^3 b^2\right) \mu\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= \left(a^2 b^3 - a^3 b^2\right),\end{aligned}$$

so dass κ wieder das Kreuzprodukt darstellt.

Eine dritte Möglichkeit ist durch eine Abbildung ${}^{\#}\left(dx^i\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}$ gegeben.

$$\kappa_3(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) := {}^{\#}\left(\iota_{\boldsymbol{b}}\left(\iota_{\boldsymbol{a}} \mu\right)\right)$$

stellt auch das Kreuzprodukt dar. Ist eine Metrik vorhanden, so ist diese zu berücksichtigen. Hier geht es nur um die Motivation.

Vektorwertige Differentialformen werden auch via (alternierende) Bilinearformen verknüpft. Hier werden insbesondere auch Metriken betrachtet.

Betrachten wir einmal $\boldsymbol{a} \underset{\kappa_1}{\wedge} \kappa_1(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$. Durch Nachrechnen zeigen wir

$$\boldsymbol{a} \underset{\kappa_1}{\wedge} \kappa_1(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

Hierbei ist g eine Metrik, also lokal ein Skalarprodukt. Die Alterniertheit dieser vektorwertigen Differentialform ist offensichtlich!

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \underset{\kappa_1}{\wedge} \kappa_1(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) &= \kappa_1(\boldsymbol{a},\kappa_1(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}))\\
&= \kappa_1\left(a^1\frac{\partial}{\partial x}+a^2\frac{\partial}{\partial y}+a^3\frac{\partial}{\partial z},\ \left(b^2c^3-b^3c^2\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\left(b^3c^1-b^1c^3\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\left(b^1c^2-b^2c^1\right)\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\\
&= \left[a^2\left(b^1c^2-b^2c^1\right)-a^3\left(b^3c^1-b^1c^3\right)\right]\frac{\partial}{\partial x}\\
&\quad+\left[a^3\left(b^2c^3-b^3c^2\right)-a^1\left(b^1c^2-b^2c^1\right)\right]\frac{\partial}{\partial y}\\
&\quad+\left[a^1\left(b^3c^1-b^1c^3\right)-a^2\left(b^2c^3-b^3c^2\right)\right]\frac{\partial}{\partial z}\\
&= \left[a^2c^2b^1+a^3c^3b^1-a^2b^2c^1-a^3b^3c^1\right]\frac{\partial}{\partial x}\\
&\quad+\left[a^3c^3b^2+a^1c^1b^2-a^3b^3c^2-a^1b^1c^2\right]\frac{\partial}{\partial y}\\
&\quad+\left[a^1c^1b^3+a^2c^2b^3-a^1b^1c^3-a^2b^2c^3\right]\frac{\partial}{\partial z}\\
&= \left[\left(a^1c^1+a^2c^2+a^3c^3\right)b^1-\left(a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3\right)c^1\right]\frac{\partial}{\partial x}\\
&\quad+\left[\left(a^1c^1+a^2c^2+a^3c^3\right)b^2-\left(a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3\right)c^2\right]\frac{\partial}{\partial y}\\
&\quad+\left[\left(a^1c^1+a^2c^2+a^3c^3\right)b^3-\left(a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3\right)c^3\right]\frac{\partial}{\partial z}\\
&= \left(a^1c^1+a^2c^2+a^3c^3\right)\boldsymbol{b}-\left(a^1b^1+a^2b^2+a^3b^3\right)\boldsymbol{c}\\
&= g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-g(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

Schön zu erkennen ist, dass $\boldsymbol{a} \underset{\kappa_1}{\wedge} \kappa_1(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{a} \underset{\kappa_1}{\wedge} \kappa_1(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}) = -\kappa_1(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \underset{\kappa_1}{\wedge} \boldsymbol{a} = \kappa_1(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}) \underset{\kappa_1}{\wedge} \boldsymbol{a}$ gilt. Es handelt sich folglich wieder um eine vektorwertige Differentialform.

Eine weitere Anwendung ist die Theorie der ***Differentialgleichungen***.

1. Betrachten wir die Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}dx_1 &= x_2dt\\ dx_2 &= x_1dt\end{aligned}\right.,$$

so kann dafür

$$\frac{dx_1}{x_2} = dt = \frac{dx_2}{x_1} \Leftrightarrow x_1dx_1 - x_2dx_2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = \text{konstant}$$

geschrieben werden. Die ***Trajektorien*** (Bahnkurven, Phasenkurven) sind ***Hyperbeln***.

Die Funktionen die diese Gleichung der Trajektorien erfüllen heißen ***„Erste Integrale“***, auch ***„Vorintegrale“*** genannt.

Die Gleichung

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_1}$$

heißt das ***„Charakteristische System“***.

Hier sind es die ***Hyperbelfunktionen*** $\sinh$ und $\cosh$, denn $\cosh^2(at)-\sinh^2(at)=1$. Mit den Anfangsbedingungen erhalten wir als Lösung der Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= x_1(0)\cosh(t) + x_2(0)\sinh(t),\\
x_2(t) &= x_1(0)\sinh(t) + x_2(0)\cosh(t).
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung kann auch via des Diffeomorphismus‘ » $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 - x_2$ «, also

$$\left.\begin{array}{r}\dot{y}_1 = y_1\\ \dot{y}_2 = -y_2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r}dy_1 = y_1 dt\\ dy_2 = -y_2 dt\end{array}\right\} \Leftrightarrow y_2 dy_1 + y_1 dy_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 y_2 = \text{konstant}$$

oder auch ***orthogonale Trajektorien*** » $\frac{x_1}{x_2} = \frac{dx_2}{dx_1} \Leftrightarrow \frac{y_1}{y_2} = -\frac{dy_1}{dy_2}$ « gelöst werden. Dies liefert

$$y_1 dy_2 + y_2 dy_1 = 0 \Leftrightarrow y_1 y_2 = \text{konstant} .$$

Auch hier liegen Hyperbeln vor. Erste Integrale sind durch $ae^{\alpha t} \cdot be^{-\alpha t} = abe^0 = ab$ gegeben. Mit den Anfangsbedingungen finden wir

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_1(0)\, e^t,\\ y_2(t) &= y_2(0)\, e^{-t}. \end{aligned}$$

Die Rücktransformation des Diffeomorphismus‘ $2x_1(t) = y_1(t) + y_2(t),\ 2x_2(t) = y_1(t) - y_2(t)$ liefert die obige Lösung.

$$\begin{aligned} x_1 dx_1 - x_2 dx_2 = 0 &\Leftrightarrow (y_1 + y_2) d(y_1 + y_2) - (y_1 - y_2) d(y_1 - y_2) = 0 \Leftrightarrow y_2 dy_1 + y_1 dy_2 = 0,\\ y_2 dy_1 + y_1 dy_2 = 0 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2) d(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2) d(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 dx_1 - x_2 dx_2 = 0. \end{aligned}$$

2. Sei die Differentialgleichung

$$\left.\begin{array}{r}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -x_1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r}dx_1 = x_2 dt\\ dx_2 = -x_1 dt\end{array}\right.$$

gegeben. Sie „sieht“ scheinbar einfach aus. Wir erhalten

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = \text{konstant} .$$

Dies sind ***konzentrische Kreise,*** werden folglich durch die ***Kreisfunktionen*** $a\cos(\omega t)$ und $a\sin(\omega t)$ gelöst. Mit den Anfangsbedingungen folgen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0)\cos(t) + x_2(0)\sin(t),\\ x_2(t) &= -x_1(0)\sin(t) + x_2(0)\cos(t). \end{aligned}$$

Die orthogonale Trajektorien sind mit den integrierenden Faktoren y_1^{-2} oder y_2^{-2}

$$y_1^{-2}(y_1 dy_2 - y_2 dy_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{y_2}{y_1} = \text{konstant oder } y_2^{-2}(y_2 dy_1 - y_1 dy_2) = 0 \Leftrightarrow \frac{y_1}{y_2} = \text{konstant} .$$

Sie stellen Geraden durch den Ursprung dar $ay_2 = by_1$. Die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$\left.\begin{array}{r}\frac{dy_1}{y_1} = dt\\ \frac{dy_2}{y_2} = dt\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\dot{y}_1 = y_1\\ \dot{y}_2 = y_2\end{array}\right. \text{ mit den Lösungen } \begin{array}{l} y_1(t) = y_1(0)e^t,\\ y_2(t) = y_2(0)e^t. \end{array}$$

Natürlich gelten solche Aussagen auch für ***„Partielle Differentialgleichungen“***.

3. Gegeben sei folgende partielle Differentialgleichung.

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(\boldsymbol{x})$$

Sei $\varphi : I \to U \subseteq \mathbf{E}$, U offen im Banachraum $\mathbf{E}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ eine Lösung. Eine C^1-Funktion $\Psi : U \to \mathbf{F}$, wobei $\mathbf{F}$ ein Banachraum ist, heißt ein ***erstes Integral*** oder ***Vorintegral***, wenn

$$\Psi\left(\varphi(t)\right) = \text{konstant}$$

ist. Die Zuordnung $x = \varphi(t)$ definiert eine ***Trajektorie***. Mit anderen Worten: Ein erstes Integral ist auf den Trajektorien konstant. Dies folgt aus

$$\Psi'\left(\varphi(t)\right) \bullet \varphi'(t) = \Psi'(x) \bullet f(x) = 0\,,$$

da $\varphi'(t) = f\left(\varphi(t)\right)$. Im n-dimensionalen Raum gilt

$$\Psi'(x) \bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = 0\,.$$

Das charakteristische System ist dann gegeben durch

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(x)}\,.$$

Beispiel

Gegeben sei folgende ***partielle Differentialgleichung***.

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f \;\text{ mit }\; f(x, y)$$

Gesucht sind alle ***ersten Integrale***.

Das ***charakteristische System*** ist

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{df}{f}\,.$$

Wir finden sehr schnell unabhängige erste Integrale in einer Umgebung von (a, b, c) mit $a \neq 0$.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow ydx + xdy = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \mathrm{k}_1,\;\; \frac{dx}{x} = \frac{df}{f} \Leftrightarrow fdx + xdf = 0 \Leftrightarrow \frac{f}{x} = \mathrm{k}_2$$

Folglich sind $\frac{f}{x}$, $\frac{y}{x}$ erste Integrale. Daher ist $f(x, y) = x \cdot \Psi\left(\frac{y}{x}\right)$, wobei Ψ eine beliebige C^1-Funktion ist.

Weitere Anwendungen finden wir bei Extrema mit Zwangsbedingungen (***Multiplikatoren von Lagrange***).

An dieser Stelle beende ich die Motivation, obwohl noch nichts über die große Bedeutung in der Differentialgeometrie gesagt wurde, vieles über Differentialoperatoren wie der Gradient, die Rotation oder die Divergenz noch gesagt werden könnte. Alle sind von einer Metrik abhängig. Deshalb gehören sie ***nicht*** lapidar in eine Analysisvorlesung.

1. Differentialformen in Banachräumen

DEFINITION 1.1

Es seien $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ zwei Banachräume. Eine p-lineare Abbildung $\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{L}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$, $p \geq 2$ heißt ***alternierend***, wenn

$$\bigvee_{1<i<p} \bigvee_{1<j<p} \bigwedge_{\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j \in \mathbf{E}} \left(\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}\left(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_i,\dots,\mathbf{e}_j,\dots,\mathbf{e}_p\right) = \mathbf{0} \right).$$

In Worten: Stimmen zwei der Vektoren in der $\mathbf{F}$-wertigen p-Linearform überein, so ist der zugeordnete Vektor stets null. Aus einer p-lineare Abbildung $\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{L}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$ kann durch Antisymmetrisierung eine alternierende p-lineare Abbildung erstellt werden, die für $\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$ wie die Identität wirkt. ***Konstruieren Sie diese! Beginnen Sie mit*** $p = 2,3,4,\dots$

Die Menge der $\mathbf{F}$-wertigen alternierenden p-Linearformen werden mit $\mathscr{A}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$, $p \geq 2$ bezeichnet. Wir setzen noch $\mathscr{A}_0(\mathbf{E};\mathbf{F}) := \mathbf{F}$ und $\mathscr{A}_1(\mathbf{E};\mathbf{F}) := \mathscr{L}(\mathbf{E};\mathbf{F})$, um Fallunterscheidungen zu vermeiden. Insbesondere ist $\mathscr{A}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$ ein Teilvektorraum von $\mathscr{L}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$.

Es sei nun $U \subseteq \mathbf{E}$ offen. Eine Abbildung $\boldsymbol{\omega}: U \to \mathscr{A}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$ heißt eine $\mathbf{F}$-***wertige p-Differentialform*** der Klasse C^1, wenn $\boldsymbol{\omega}$ in U differenzierbar und stetig ist. Mithin sprechen wir kurz von einer vektorwertigen Differentialform. Den zugehörigen ***Vektorraum der*** $\mathbf{F}$-***wertigen p-Differentialformen der Klasse*** C^r, $r \geq 1$, bezeichnen wir mit $\boldsymbol{\Omega}_p^r(U;\mathbf{F})$. Wir setzen noch für den ***Grad*** $\deg(\omega) := p$.

DEFINITION 1.2

Es sei nun $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{L}(\mathbf{F},\mathbf{G};\mathbf{H})$ eine Bilinearform mit Werten im Banachraum $\mathbf{H}$. Es sei $U \subseteq \mathbf{E}$ offen. Das äußere Produkt von $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Omega}_p^r(U;\mathbf{F})$ und $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{\Omega}_q^r(U;\mathbf{G})$ bezüglich $\boldsymbol{\Phi}: \mathbf{F} \times \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ ist die $\mathbf{H}$-wertige $(p+q)$-Differentialform $\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{\Omega}_{p+q}^r(U;\mathbf{H})$ definiert durch

$$\left((\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{x})\right)\left(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{p+q}\right) := \sum_{\substack{\sigma \in S_{p+q} \\ \sigma(1)<\cdots<\sigma(p) \\ \sigma(p+1)<\cdots<\sigma(p+q)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\sigma(1)},\dots,\mathbf{e}_{\sigma(p)}\right), \boldsymbol{\beta}(x)\left(\mathbf{e}_{\sigma(p+1)},\dots,\mathbf{e}_{\sigma(p+q)}\right)\right)$$

Da $(\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{x})$ offensichtlich eine p-lineare $\mathbf{H}$-wertige Form der Klasse C^r ist, bleibt zu verifizieren, dass $(\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{x})$ auch alternierend ist. Dazu sei $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j$, $i < j$ und $\tau \in S_{p+q}$ die Transposition mit $\tau(i) = j$ und $\tau(k) = k$ für alle $k \in \{1,\dots,i-1,i+1,\dots,j-1,j+1,\dots p+q\}$. Es ist $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$. Ist $\sigma(1) < \sigma(i) < \sigma(j) < \sigma(p)$ oder $\sigma(p+1) < \sigma(i) < \sigma(j) < \sigma(p+q)$, so ist nach Voraussetzung nichts zu zeigen. Sei daher nach einer Permutation und Umbenennung ohne Einschränkung $j = i+1$ sowie $\sigma(1) < \sigma(i) < \sigma(p)$ und $\sigma(p+1) < \sigma(i+1) < \sigma(p+q)$, dann gilt für jedes dieser σ:

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\, \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\sigma(1)},\dots,\mathbf{e}_{\sigma(p)}\right), \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\sigma(p+1)},\dots,\mathbf{e}_{\sigma(p+q)}\right)\right) + \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\, \boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\sigma\tau(1)},\dots,\mathbf{e}_{\sigma\tau(p)}\right), \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\sigma\tau(p+1)},\dots,\mathbf{e}_{\sigma\tau(p+q)}\right)\right) = \mathbf{0}$$

und folglich für $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i+1}$ die Differentialform $\left((\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{x})\right)\left(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{p+q}\right) = \mathbf{0}$ damit alternierend.

Definition 1.3

Wir definieren nun für $\alpha\in\Omega_p^r(U;\mathbf{F})$ eine Differentialform $d\alpha\in\Omega_{p+1}^{r-1}(U;\mathbf{F})$, ***Differential*** genannt.

$$d\alpha(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\mathbf{e}_p\right):=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\left(\alpha'(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_i)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\mathbf{e}_p\right)$$

oder äquivalent dazu

$$d\alpha(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\mathbf{e}_p\right):=\sum_{\substack{\gamma\in S_{p+1}\\ \gamma(1)<\cdots<\gamma(p)}}\operatorname{sgn}(\gamma)\left(\alpha'(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\gamma(0)}\right)\right)\left(\mathbf{e}_{\gamma(1)},\ldots,\mathbf{e}_{\gamma(p)}\right).$$

Verifizieren Sie wie oben, dass $d\alpha(\boldsymbol{x})$ wirklich alternierend ist.

Korollar 1.4

Für $\alpha\in\Omega_p^r(U;\mathbf{F})$, $r\geq 2$ ist $d(d\alpha)=\mathbf{0}$.

Beweis

Nach Definition ist $d(d\alpha)(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)=\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\left[(d\alpha)'(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_i)\right]\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)$ mit

$$\begin{aligned}\left[(d\alpha)'(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_i)\right]\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)&=\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^i\left(\alpha''(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\right)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_j,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)\\&\quad-\sum_{j=i+1}^{p+1}(-1)^i\left(\alpha''(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\right)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_j,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}&(-1)^i\left[(d\alpha)'(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_i)\right]\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)+(-1)^j\left[(d\alpha)'(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_j\right)\right]\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_j,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)\\&=\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}\left(\alpha''(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\right)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_j,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)+\sum_{j=i+1}^{p+1}(-1)^{i+j+1}\left(\alpha''(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\right)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_j,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)\\&+\sum_{i=j+1}^{p+1}(-1)^{i+j+1}\left(\alpha''(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i\right)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_j,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)+\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^{i+j}\left(\alpha''(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i\right)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_i,\ldots,\hat{\mathbf{e}}_j,\ldots,\mathbf{e}_{p+1}\right)\end{aligned}$$

Zu jedem $0\leq j\leq i-1$ finden wir genau ein $j+1\leq i\leq p+1$ mit $\alpha''(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\right)-\alpha''(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i\right)=\mathbf{0}$.

Lemma 1.5

Es seien $\mathbf{F}=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i$ der Produktraum von Banachräumen $\left(\mathbf{F}_i\right)_{1\leq i\leq n}$ und $\Phi:\mathbf{F}\rightarrow\mathbf{G}$ n-linear. Es sei $g:U\rightarrow\mathbf{F}$ eine Abbildung, die in $\boldsymbol{x}\in U$, $U\subseteq\mathbf{E}$ offen, differenzierbar ist. Durch $\omega:=\Phi\circ g$ ist eine Abbildung $\omega:U\rightarrow\mathbf{G}$ definiert, die in $\boldsymbol{x}\in U$ differenzierbar ist. Dann gilt

$$\omega'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}=\Phi'(g(\boldsymbol{x}))\bullet g'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}=\sum_{i=1}^{n}\Phi\left(g_1(\boldsymbol{x}),\ldots,g_i'(\boldsymbol{x})\mathbf{e},\ldots g_n(\boldsymbol{x})\right).\qquad (L1)$$

Ist sogar $\Phi:U\rightarrow\mathscr{L}\left(\mathbf{F}_1,\ldots,\mathbf{F}_n;\mathbf{G}\right)$ von der Klasse C^1, so gilt darüber hinaus

$$\omega'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}=\left(\Phi'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}\right)\left(g(\boldsymbol{x})\right)+\sum_{i=1}^{n}\Phi(\boldsymbol{x})\left(g_1(\boldsymbol{x}),\ldots,g_i'(\boldsymbol{x})\mathbf{e},\ldots,g_n(\boldsymbol{x})\right).\qquad (L2)$$

Im Folgenden lassen wir die Stelle $\mathbf{x}$ der Einfachheit halber weg.

SATZ 1.6

Mit DEFINITION 1.2 und LEMMA 1.5 (***L1***) gilt mit $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{\Omega}_p^r\left(U;\mathbf{F}\right)$ und $\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{\Omega}_q^r\left(U;\mathbf{G}\right)$ sowie $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{L}\left(\mathbf{F},\mathbf{G};\mathbf{H}\right)$ die Gleichung

$$d(\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta})=d\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta}+\left(-1\right)^{\deg(\alpha)}\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}d\boldsymbol{\beta}\,.$$

BEWEIS

Es ist nach LEMMA 1.5 (***L1***)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta})'\bullet\mathbf{e}&=\boldsymbol{\alpha}'\bullet\mathbf{e}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta}'\bullet\mathbf{e}\\&=\boldsymbol{\alpha}'\bullet\mathbf{e}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta}+\left(-1\right)^{\deg(\alpha)\cdot\deg(\beta)}\boldsymbol{\beta}'\bullet\mathbf{e}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\alpha}\end{aligned}$$

Mit DEFINITION 1.3 folgt

$$\begin{aligned}d(\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta})&=d\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta}+\left(-1\right)^{\deg(\alpha)\cdot\deg(\beta)}d\boldsymbol{\beta}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\alpha}\\&=d\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta}+\left(-1\right)^{\deg(\alpha)\cdot\deg(\beta)+\deg(\alpha)\cdot\left(\deg(\beta)+1\right)}\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}d\boldsymbol{\beta}\\&=d\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta}+\left(-1\right)^{\deg(\alpha)}\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}d\boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.

KOROLLAR 1.7

Es sei nun $\boldsymbol{\Phi}:U\to\mathscr{L}\left(\mathbf{F},\mathbf{G};\mathbf{H}\right)$ von der Klasse C^1. Dann gilt nach LEMMA 1.4 (***L2***)

$$\boldsymbol{\omega}'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}=\left(\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}\right)\left(g(\boldsymbol{x})\right)+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\left(g_1(\boldsymbol{x}),\ldots,g_i'(\boldsymbol{x})\mathbf{e},\ldots,g_n(\boldsymbol{x})\right).$$

Folglich ist dann $(\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta})'\bullet\mathbf{e}=\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}'\bullet\mathbf{e}}{\wedge}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}'\bullet\mathbf{e}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta}'\bullet\mathbf{e}$ zu verwenden. Damit korrigiert sich im SATZ 1.6 zusätzlich

$$\sum_{\substack{\chi\in S_{p+q+1}\\ \chi(1)<\cdots\chi(p+q)}}\operatorname{sgn}\chi\left(\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}'\bullet\mathbf{e}_{\chi(0)}}{\wedge}\boldsymbol{\beta}\right)\left(e_{\chi(1)},\ldots,e_{\chi(p+q)}\right).$$

Beachten wir noch, dass $d\boldsymbol{\Phi}$ eine 1-Differenialform mit Werten in $\mathscr{L}\left(\mathbf{F},\mathbf{G};\mathbf{H}\right)$ ist, so folgt

$$d(\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta})=d\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta}+\left(-1\right)^{\operatorname{grad}(\alpha)}\boldsymbol{\alpha}\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}d\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\underset{d\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\beta}\,.$$

DEFINITION 1.8

Es sei $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{L}\left(\mathbf{F}_1,\ldots,\mathbf{F}_k;\mathbf{G}\right)$ eine stetige k-Linearform mit Werten im Banachraum $\mathbf{G}$. Es seien $\boldsymbol{\alpha}_i\in\boldsymbol{\Omega}_{p_i}^r\left(U;\mathbf{F}_i\right)$, $1\le i\le k$ Differentialformen. Durch

$$((\boldsymbol{\alpha}_1\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\cdots\underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge}\boldsymbol{\alpha}_k)(\boldsymbol{x}))\left(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{p_1+\cdots+p_k}\right):=\sum_{\sigma\in S_{p_1+\cdots p_k}}\operatorname{sgn}\sigma\,\boldsymbol{\Phi}\Big(\left(\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{x})\right)\left(\mathbf{e}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(p_1)}\right),\ldots,\left(\boldsymbol{\alpha}_k(x)\right)\left(\mathbf{e}_{\sigma(p_1+\cdots+p_{k-1}+1)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(p_1+\cdots+p_k)}\right)\Big)$$

wobei $\sigma(1)<\cdots<\sigma(p_1)$, $\ldots$, $\sigma(p_1+\cdots+p_{k-1}+1)<\cdots<\sigma(p_1+\cdots+p_k)$, wird eine $\left(p_1+\cdots+p_k\right)-$Differentialform mit Werten in $\mathbf{G}$ definiert.

Sind $\mathbf{F}_i = \mathbf{K}$, $1 \le i \le k$ und ist $\mathbf{K}$ der Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen, so ist $\boldsymbol{\Phi}$ einfach das *k*-fache Produkt. In diesem Fall schreiben wir kurz

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\alpha}_k .$$

Der Beweis ist genauso zu führen wie in Definition 0.4.2.
Sind $\mathbf{F}_i = \mathbf{G}$, $1 \le i \le k$, so kann $\boldsymbol{\alpha}_1 \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \cdots \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_k$ wie folgt definiert werden. Hier für $k = 3$.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_2 \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_3)(\boldsymbol{x}) := ((\boldsymbol{\alpha}_1 \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_2)(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_3(\boldsymbol{x}))$$

Vermöge dieser Definition erhalten wir eine Algebra. Zeigen Sie dafür

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_2)(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_3(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} (\boldsymbol{\alpha}_2 \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\alpha}_3)(\boldsymbol{x}) .$$

Für die sogenannten Differentiale defineren wir spezielle Differentialformen.

DEFINITION 1.9

Es sei $U \subseteq \mathbf{E}$ offen und $\boldsymbol{\omega} : U \to \mathscr{A}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$ eine $\mathbf{F}$-wertige *p*-Differentialform der Klasse C^1. Es sei $\mathbf{E} = \mathbf{G}_1 \times \cdots \times \mathbf{G}_k$ und $\iota_U : U \to \mathbf{E}$ die kanonische Einbettung. Für jedes $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le k$ sei $\boldsymbol{\pi}^i$ die kanonische Projektion, also $\boldsymbol{\pi}^i \circ \iota_U : U \to \mathbf{G}_i$ definiert durch $\boldsymbol{\pi}^i(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}_i$ mit $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$. Dann ist $d\boldsymbol{\pi}^i : U \to \mathscr{A}(\mathbf{G}_1 \times \cdots \times \mathbf{G}_k; \mathbf{G}_i)$ nichts anderes als $d\boldsymbol{\pi}^i(\boldsymbol{x})(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_k) := \mathbf{g}_i$, denn $(\boldsymbol{\pi}^i \circ \iota_U)'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\pi}^i$.
Es sei nun $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{L}(\mathbf{G}_1, \cdots, \mathbf{G}_p; \mathbf{F})$ eine stetige nicht ausgeartete vektorwertige *p*-Linearform und $d\boldsymbol{\pi}^{j_1} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \ldots \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} d\boldsymbol{\pi}^{j_p} : U \to \mathscr{A}_p(\mathbf{E};\mathbf{F})$, wobei $\mathbf{E} = \mathbf{G}_1 \times \cdots \times \mathbf{G}_k$ ist, dann

$$d\boldsymbol{\pi}^{j_1} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \ldots \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} d\boldsymbol{\pi}^{j_p}(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p) := \sum_{\lambda \in S_p} \operatorname{sgn}(\lambda) \boldsymbol{\Phi}\left(d\boldsymbol{\pi}^{j_1}(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_{\lambda(1)}), \ldots, d\boldsymbol{\pi}^{j_p}(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_{\lambda(p)})\right).$$

Dann gibt es eindeutig bestimmte $w_{j_1,\ldots,j_p} : U \to \mathbf{F}$ der Klasse C^r, $r \ge 1$, so dass

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{j_1 < \ldots < j_p} w_{j_1,\ldots,j_p} \bullet d\boldsymbol{\pi}^{j_1} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \ldots \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} d\boldsymbol{\pi}^{j_p} .$$

Diese Darstellung nennen wir kanonische Darstellung der $\mathbf{F}$-wertige *p*-Differentialform. Sind $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \cdots = \mathbf{E}_k = \mathbf{K}$ und $\mathbf{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ Ist $\mathbf{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ der Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen, so ist $\boldsymbol{\Phi}$ das gewöhnliche Produkt von *p* Zahlen.
Diese Darstellung nennen wir die ***kanonische Darstellung*** der Differentialform.
Ist $\mathbf{E}$ k-dimensional, so darf jedes $\mathbf{E}_i \simeq \mathbf{K}$ angesehen werden. Dann ist $\boldsymbol{\Phi}$ das gewöhnliche Produkt und wir schreiben $dx^j := d\boldsymbol{\pi}^j$. Mit 0.6.6 ist nun

$$d\boldsymbol{\pi}^{j_1} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \ldots \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} d\boldsymbol{\pi}^{j_p}(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p) := \sum_{\lambda \in S_p} \operatorname{sgn}(\lambda) \boldsymbol{\Phi}\left(d\boldsymbol{\pi}^{j_1}(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_{\lambda(1)}), \ldots, d\boldsymbol{\pi}^{j_p}(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_{\lambda(p)})\right),$$

also

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p) &= \sum_{j_1 < \ldots < j_p} w_{j_1,\ldots,j_p}(\boldsymbol{x})\left(d\boldsymbol{\pi}^{j_1} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \ldots \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} d\boldsymbol{\pi}^{j_p}\right)(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p) \\ &= \sum_{j_1 < \ldots < j_p} w_{j_1,\ldots,j_p}(\boldsymbol{x}) \sum_{\lambda \in S_p} \operatorname{sgn}(\lambda) \boldsymbol{\Phi}\left(d\boldsymbol{\pi}^{j_1}(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_{\lambda(1)}), \ldots, d\boldsymbol{\pi}^{j_p}(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_{\lambda(p)})\right)\end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{e}_i = \left(\mathbf{e}_{i,1},\dots,\mathbf{e}_{i,k}\right)$ setzen wir $\mathbf{e}_i^{j_l} := (0,\dots,0,\underbrace{e_{i,j_l}}_{j_l-\text{te Stelle}},0,\dots,0)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_1^{i_1},\dots,\mathbf{e}_p^{i_p}\right) &= \sum_{j_1<\dots<j_p} w_{j_1,\dots,j_p}(\boldsymbol{x}) \sum_{\lambda\in S_p} \operatorname{sgn}(\lambda)\boldsymbol{\Phi}\left(d\boldsymbol{\pi}^{j_1}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\lambda(1)}^{i_{\lambda(1)}}\right),\dots,d\boldsymbol{\pi}^{j_p}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{\lambda(p)}^{i_{\lambda(p)}}\right)\right)\\ &= \sum_{j_1<\dots<j_p} w_{j_1,\dots,j_p}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{e}_{1,j_1}\delta_i^j,\dots,\mathbf{e}_{p,j_p}\delta_p^j\right)\\ &= w_{i_1,\dots,i_p}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{e}_{1,i_1},\dots,\mathbf{e}_{p,i_p}\right)\end{aligned}$$

Definieren wir $w_{j_1,\dots,j_p}: U \to \mathbf{F}$ durch

$$w_{j_1,\dots,j_p}(\boldsymbol{x}) := \left(\boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{e}_{1,j_1},\dots,\mathbf{e}_{p,j_p}\right)\right)^{-1} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_{1,j_1},\dots,\mathbf{e}_{p,j_p}\right),$$

so ist alles gezeigt.

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit Abbildungen zwischen Banachräumen.

DEFINITION 1.10

Es seien $\mathbf{E},\mathbf{F},\mathbf{G}$ Banachräume. Es sei $U \subseteq \mathbf{E}$ offen und $f: U \to V \subseteq \mathbf{F}$ eine Abbildung der Klasse C^{r+1}. Für eine Differentialform $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Omega}_p^r(V,\mathbf{G})$ mit Werten in $\mathbf{G}$ sei $f^*\boldsymbol{\alpha}$ definiert durch

$$\left(f^*\boldsymbol{\alpha}\right)(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p\right) := \boldsymbol{\alpha}(f(\boldsymbol{x}))\left(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_1,\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\right).$$

Dann ist $f^*\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Omega}_p^r(U,\mathbf{G})$. $f^*\boldsymbol{\alpha}$ heißt ***pull back*** von $\boldsymbol{\alpha}$ durch f. Es gilt

(i) $f^*(\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} \boldsymbol{\beta}) = f^*\boldsymbol{\alpha} \underset{\boldsymbol{\Phi}}{\wedge} f^*\boldsymbol{\beta}$

(ii) $f^*(d\boldsymbol{\alpha}) = d\left(f^*\boldsymbol{\alpha}\right)$

(iii) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ für eine weitere Abbildung $g: W \to U$ der Klasse C^{r+1}, $W \subseteq \mathbf{H}$ offen im Banachraum $\mathbf{H}$.

BEWEIS

Wir haben zu zeigen, dass $f^*\boldsymbol{\alpha}$ von der Klasse C^r ist. Zunächst ist $f'(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{L}(\mathbf{E};\mathbf{F})$ nach 0.3.3. Also sind $\boldsymbol{\alpha}\circ f: U \to \mathscr{A}_p(\mathbf{F};\mathbf{G})$ und f' von der Kasse C^r.

Wir setzen in 1.5 (***L1***) für die Ableitung $g: U \to \mathbf{F}$ einfach $g: U \to \mathbf{F}^p$ mit $g(\boldsymbol{x}) := \left(g_1(\boldsymbol{x}),\dots,g_p(\boldsymbol{x})\right)$ und $g_i(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_i$. Folglich stimmt nun $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{\Phi}\left((\boldsymbol{\alpha}\circ f)(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})\right)$ mit $\left(f^*\boldsymbol{\alpha}\right)(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_p\right) := \boldsymbol{\alpha}(f(\boldsymbol{x}))\left(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_1,\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\right)$ überein. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}'(\boldsymbol{x})\mathbf{e} &= \left(\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}\right)(g(\boldsymbol{x})) + \sum_{i=1}^p \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\left(g_1(\boldsymbol{x}),\dots,g_i'(\boldsymbol{x})\mathbf{e},\dots,g_n(\boldsymbol{x})\right)\\ &= \boldsymbol{\alpha}'(f(\boldsymbol{x}))\bullet f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}\left(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_1,\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\right) + \sum_{i=1}^p (\boldsymbol{\alpha}\circ f)(\boldsymbol{x})\left(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_1,\dots,f''(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}),\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\right) \qquad (\#)\\ &= \boldsymbol{\alpha}'(f(\boldsymbol{x}))\bullet f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}\left(f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_1,\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\right) + \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1}\boldsymbol{\alpha}(f(\boldsymbol{x}))\left(f''(\boldsymbol{x})(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}), f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_1,\dots,f'(\boldsymbol{x})\mathbf{e}_p\right)\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.

Wir beweisen (i) $f^*(\alpha \underset{\Phi}{\wedge} \beta) = f^*\alpha \underset{\Phi}{\wedge} f^*\beta$.

$$
\begin{aligned}
(f^*(\alpha \underset{\Phi}{\wedge} \beta))(x)\left(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{p+q}\right) &= ((\alpha \underset{\Phi}{\wedge} \beta)(f(x)))\left(f'(x)\mathbf{e}_1,\ldots,f'(x)\mathbf{e}_{p+q}\right) \\
&= \sum_{\substack{\sigma\in S_{p+q}\\ \sigma(1)<\cdots<\sigma(p)\\ \sigma(p+1)<\cdots<\sigma(p+q)}} \operatorname{sgn}\sigma\, \Phi\Big(\alpha\big(f(x)\big)\big(f'(x)\mathbf{e}_{\sigma(1)},\ldots,f'(x)\mathbf{e}_{\sigma(p)}\big), \beta\big(f(x)\big)\big(f'(x)\mathbf{e}_{\sigma(p+1)},\ldots,f'(x)\mathbf{e}_{\sigma(p+q)}\big)\Big) \\
&= \sum_{\substack{\sigma\in S_{p+q}\\ \sigma(1)<\cdots<\sigma(p)\\ \sigma(p+1)<\cdots<\sigma(p+q)}} \operatorname{sgn}\sigma\, \Phi\Big(f^*\alpha(x)\big(\mathbf{e}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(p)}\big), f^*\beta(x)\big(\mathbf{e}_{\sigma(p+1)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(p+q)}\big)\Big) \\
&= ((f^*\alpha \underset{\Phi}{\wedge} f^*\beta)(x))\left(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{p+q}\right)
\end{aligned}
$$

Wir beweisen (ii) $f^*\left(d\alpha\right) = d\left(f^*\alpha\right)$.

Es ist

$$
\begin{aligned}
d\left(f^*\alpha\right)(x)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\mathbf{e}_p\right) &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\left(\left(f^*\alpha\right)'(x)(\mathbf{e}_i)\right)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\overset{\wedge}{\mathbf{e}_i},\ldots,\mathbf{e}_p\right) \\
&= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\left(\alpha'\big(f(x)\big)\bullet f'(x)(\mathbf{e}_i)\right)\left(f'(x)\mathbf{e}_0,\ldots,\overset{\wedge}{f'(x)\mathbf{e}_i},\ldots,f'(x)\mathbf{e}_p\right) \\
&\quad + \sum_{0\le k<i\le p}(-1)^i\alpha\big(f(x)\big)\Big(f'(x)\mathbf{e}_0,\ldots,\underbrace{f''(x)(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k)}_{k-\text{te Stelle}},\ldots,\overset{\wedge}{f'(x)\mathbf{e}_i},\ldots,f'(x)\mathbf{e}_p\Big) \\
&\quad + \sum_{0\le i<k\le p}(-1)^i\alpha\big(f(x)\big)\Big(f'(x)\mathbf{e}_0,\ldots,\overset{\wedge}{f'(x)\mathbf{e}_i},\ldots,\underbrace{f''(x)(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k)}_{k-\text{te Stelle}},\ldots,f'(x)\mathbf{e}_p\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\left(\alpha'\big(f(x)\big)\bullet f'(x)(\mathbf{e}_i)\right)\left(f'(x)\mathbf{e}_0,\ldots,\overset{\wedge}{f'(x)\mathbf{e}_i},\ldots,f'(x)\mathbf{e}_p\right) \\
&= d\alpha\big(f(x)\big)\big(f'(x)\mathbf{e}_0,\ldots,f'(x)\mathbf{e}_p\big) \\
&= \left(f^*d\alpha\right)(x)\left(\mathbf{e}_0,\ldots,\mathbf{e}_p\right),
\end{aligned}
$$

denn $f''(x)(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k) = f''(x)(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_i)$ und damit

$$
\alpha\big(f(x)\big)\left(f'(x)\mathbf{e}_0,\ldots,f''(x)(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_i),\ldots,\overset{\wedge}{f'(x)\mathbf{e}_k},\ldots,f'(x)\mathbf{e}_p\right)+(-1)\alpha\big(f(x)\big)\left(f'(x)\mathbf{e}_0,\ldots,\overset{\wedge}{f'(x)\mathbf{e}_i},\ldots,f''(x)(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k),\ldots,f'(x)\mathbf{e}_p\right)=0\,.
$$

(iii) bleibt als Übung.

2. Wir kommen zu den ***basisabhängigen Darstellungen***.

Satz 2.1

Es sei $\omega \in \boldsymbol{\Omega}^r(\xi)$. Es sei $\mathbf{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ der Körper der rellen oder komplexen Zahlen. Es seien τ_M und ξ endlichdimensionale Bündel über M mit $\dim(\tau_M) = n$ sowie $\dim(\xi) = m$.

Dann hat ω die Darstellung

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} \omega^i \cdot s_i, \text{ wobei } \omega^i \in \boldsymbol{\Omega}^r(M_{\mathbf{K}}) \text{ und } s_i \in \boldsymbol{\Gamma}(\xi).$$

Ferner hat $\omega^i \in \boldsymbol{\Omega}^r(M_{\mathbf{K}})$ die Darstellung

$$\omega^i = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \omega^i_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} ,$$

wobei das Produkt induktiv nach DEFINITION 1.8 definiert ist. Insbesondere gilt mit $\beta \in S_n$

$$dx^{\beta(i_1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\beta(i_r)} = \operatorname{sgn} \beta \cdot dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \text{ und } \bigwedge_{1 \le i \le n} dx^i \wedge dx^i = 0 .$$

Beweis

Es sei $V \subset M$ eine trivialisierende Umgebeung für ξ. Nach Voraussetzung existieren Basisschnitte $s_1, \ldots, s_m \in \boldsymbol{\Gamma}(\xi_M)$ und Basisfelder $t_1, \ldots, t_n \in \boldsymbol{\Gamma}(\tau_V)$. Folglich ist aufgrund $\dim(\xi) = m$

$$\omega\left(t_{i_1}, \ldots, t_{i_r}\right) = \sum_{i=1}^{m} \omega_V^i \left(t_{i_1}, \ldots, t_{i_r}\right) \cdot s_i \in \boldsymbol{\Gamma}(\xi_V) \cong \boldsymbol{\Gamma}\left(V_{\mathbf{K}^m}\right)$$

und

$$\omega_V^i \left(t_{i_1}, \ldots, t_{i_r}\right) \in \boldsymbol{\Gamma}(V_{\mathbf{K}}).$$

Da ω_V alternierend ist, hat auch ω_V^i für jedes $1 \le i \le m$ diese Eigenschaft. Es sei nun $\omega^i \in \boldsymbol{\Omega}^r(M_{\mathbf{K}})$. Wir setzen $\omega^i_{i_1 \cdots i_r} := \omega^i\left(t_{i_1}, \ldots, t_{i_r}\right)$. Es seien $dx^1, \ldots, dx^n \in \boldsymbol{\Gamma}\left(\tau_V^*\right)$ die zu $t_1, \ldots, t_n \in \boldsymbol{\Gamma}(\tau_V)$ dualen Basisformen, also $dx^j(t_i) = \delta_i^j$. Es folgt

$$\omega^i = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \omega^i_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} ,$$

wobei

$$\left[\left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{r-1}}\right) \wedge dx^{i_r}\right]\left(t_{j_1}, \ldots, t_{j_r}\right) = \sum_{\substack{\sigma \in S_r \\ \sigma(j_1) < \cdots < \sigma(j_{r-1})}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \left[\left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{r-1}}\right)\left(t_{j_1}, \ldots, t_{j_{r-1}}\right)\right] \cdot dx^{i_r}\left(t_{\sigma(j_r)}\right)$$

Induktiv mit DEFINITION 1.16 4. Eigenschaft definiert ist. Insbesondere gilt mit $\beta \in S_n$

$$dx^{\beta(i_1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\beta(i_r)} = \operatorname{sgn} \beta \cdot dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \text{ und } \bigwedge_{1 \le i \le n} dx^i \wedge dx^i = 0 .$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 2.2

Es sei $\omega \in \boldsymbol{\Omega}^r(\xi)$ und ∇ ein Zusammenhang auf ξ über M. Das Vektorraumbündel habe die Dimension m. Es sei $\omega = \sum_{i=1}^{m} \omega^i \cdot s_i$ in einer Trivialisierung V. Dann ist

$$d^{\nabla}\omega = \sum_{i=1}^{m}\left(d\omega^i \cdot s_i + \omega^i \wedge d^{\nabla} s_i\right)$$

Insbesondere finden wir im Banachraum mit dem kanonischen Zusammenhang die Formel

$$d\omega\left(X_1,\ldots,X_r\right)=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\,\omega'\bullet X_i\bullet\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r\right).$$

BEWEIS

Wir lassen den Index V der trivialisierenden Umgebung weg und arbeiten lokal im Banachraum.

$$\begin{aligned}
d^{\nabla}\omega\left(X_1,\ldots,X_r\right)&=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\left(\nabla\omega\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r\right)\right)\left(X_i\right)\\
&\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\,\omega\left(\left[X_i,X_j\right],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_r\right)\\
&=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\left(\left(\omega\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r\right)\right)'\bullet X_i+\Gamma\left(\omega\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r\right)\right)\left(X_i\right)\right)\\
&\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\,\omega\left(X_j'X_i-X_i'X_j,X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_r\right)\\
&=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\left(\left(\omega'\bullet X_i\cdot\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r\right)\right)+\Gamma\left(\omega\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r\right)\right)\left(X_i\right)\right)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{r}\omega\left(X_1,\ldots,X_j'\cdot X_i,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r\right)\\
&\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\,\omega\left(X_j'X_i-X_i'X_j,X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_r\right)\\
&=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\left(\left(\omega'\bullet X_i\cdot\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r\right)\right)+\Gamma\left(\omega\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r\right)\right)\left(X_i\right)\right)
\end{aligned}$$

Setzen wir jetzt die lokale Darstellung ein und beachten, dass

$$\omega^j\cdot s_j\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r\right)=\omega^j\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r\right)\cdot s_j$$

gilt, so folgt nach Definition

$$\begin{aligned}
d^{\nabla}\omega\left(X_1,\ldots,X_r\right)&=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{r}\left(\left(\omega^j\right)'\bullet X_i\bullet\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r\right)\right.\\
&\qquad+\omega^j\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r\right)\cdot s_j'\cdot X_i\\
&\qquad\left.+\omega^j\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r\right)\cdot\Gamma\left(s_j'\right)\left(X_i\right)\right)\\
&=\sum_{j=1}^{r}\left(d\omega^j\left(X_1,\ldots,X_r\right)\cdot s_j\right.\\
&\quad\left.+\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\,\omega^j\left(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_r\right)\cdot d^{\nabla}s_j\left(X_i\right)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{m}\left(d\omega^i\cdot s_i+\omega^i\wedge d^{\nabla}s_i\right)\left(X_1,\ldots,X_r\right)
\end{aligned}$$

Die Formel für einen Banachraum erhalten wir durch Gamma $\Gamma=0$

SATZ 2.3

Es sei $\omega \in \boldsymbol{\Omega}^r(M_{\mathbf{K}})$, $\omega = \sum_{i_1 \le \cdots \le i_r \le n} \omega_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$. Dann ist

$$d\omega = \sum_{i_1 \le \cdots \le i_r \le n} d\omega_{i_1 \cdots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r},$$

wobei

$$d\omega_{i_1 \cdots i_r} = \sum_{j=1}^{n} D_j \omega_{i_1 \cdots i_r} dx^j = \sum_{j=1}^{n} t_j\left(\omega_{i_1 \cdots i_r}\right) dx^j.$$

$t_1, \ldots, t_n$ sind die zu $dx^1, \ldots, dx^n$ dualen Basisfelder.

BEWEIS:

Da d als Differential $\mathbf{K}$ - linear ist, genügt es die Aussage für $\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$ zu beweisen. Nach Satz 1.4 ist

$$d\omega = d\left(f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}\right) = df \wedge \left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}\right) + f \cdot d\left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}\right)$$

Es sei nun $X \in \boldsymbol{\Gamma}(\tau_M)$, $X = \sum_{i=1}^{n} h_i t_i$, $t_1, \ldots, t_n$ die zu $dx^1, \ldots, dx^n$ dualen Basisfelder. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} df(X) &= \sum_{i=1}^{n} h_i df(t_i) = \sum_{i=1}^{n} h_i t_i(f) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} h_i t_i(f) dx^j(t_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} t_j(f) dx^j(X) \end{aligned}$$

Offenbar gilt $df \wedge \left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}\right) = df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$. Es bleibt daher zu zeigen, dass $d\left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}\right) = 0$. Dies geschieht durch Induktion nach r.

Für $r = 1$ ist $d\left(dx^{i_1}\right) = 0$ nach KOROLLAR 1.9. Sei nun die Aussage für $r-1$ bewiesen. Wir finden

$$d\left(x^{i_1} \cdot dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}\right) = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} + x^{i_1} \cdot d\left(dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}\right) = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

und damit $d\left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}\right) = dd\left(x^{i_1} \cdot dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}\right) = 0$ nach KOROLLAR 1.9.

KOROLLAR 2.4

Es seien ∇ eine Ableitung für ξ über M und $\alpha \in \boldsymbol{\Omega}^r(\xi)$. Es sei $f \in \mathscr{C}^p(N, M)$. Es seien $X_1, \ldots, X_r \in \boldsymbol{\Gamma}(\tau_N)$. Zu jedem $X \in \boldsymbol{\Gamma}(\tau_N)$ existiere ein $Y \in \boldsymbol{\Gamma}(\tau_M)$ mit $T_n f(X(n))) = Y(f(n))$. Dann gilt:

1. $f^* dx^i = d\left(f^* x^i\right) = d\left(x^i \circ f\right) = df_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y^j} dy^j$, wenn $dx^1, \ldots, dx^n$ die zu $t_1, \ldots, t_n$ dualen Basisfelder in einer Trivialisierung $f(V) \cap W \subset M$ sind.

2. $f^* d^{\nabla} \alpha = \sum_{i=1}^{m} \left(d\left(f^* \alpha\right) \cdot f^* s_i + f^* \alpha^i \wedge d^{f^* \nabla} f^* s_i\right)$, wenn $\dim\left(\xi_p\right) = m$ ist und $f^* s_1, \ldots, f^* s_m$ die zurückgeholten Basisschnitte auf $f^* \xi$ sind.

.